医学部専門予備校　クエスト　解答速報

日本大学（医）N方式第１期　一次試験

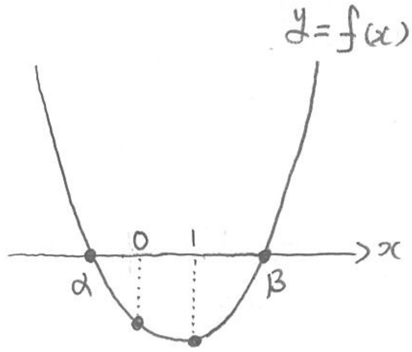
数学　試験日２月１日（火）

$\boxed{\text{I}}$ (1) $f(x)=a^2x^2-3ax+(2a-2)$ $(a\neq 0)$ とおく．

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，

$f(x)=0$ の解が $x=\alpha, \beta$ ($\alpha<0$ かつ $1<\beta$) となるとき，

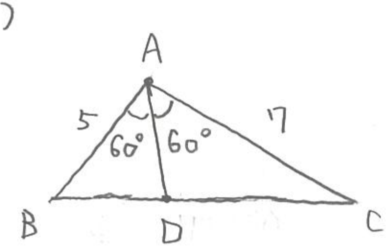
$$\begin{cases} f(0)=2a-2<0 \\ f(1)=a^2-a-2<0 \end{cases} \quad (a\neq 0)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0,\ 0<a<1 \\ -1<a<0,\ 0<a<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{-1<a<0,\ 0<a<1}$$

(2)



$AD=x$ とおくと，

$\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC$ より，

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot x\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot \sin 120^\circ$

したがって，$x=\underline{\frac{35}{12}}$

(3) 布を1枚通過する毎に光の量は60%減少する（0.4倍になる）。
布をn枚通過したときに光の量が1%以下（0.01倍以下）
になればよいから、

$(0.4)^n \leqq 0.01$

$\dfrac{2^{2n}}{10^n} \leqq \dfrac{1}{100}$

$\log_{10}\dfrac{2^{2n}}{10^n} \leqq \log_{10}\dfrac{1}{100}$

$2n\log_{10}2 - n\log_{10}10 \leqq -2$

$-0.3980n \leqq -2$

$n \geqq 5.02\cdots$

以上より、$\underline{n \geqq 6}$

(4) x^{50} を x^3-1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると、

$x^{50} = (x^3-1)Q(x) + (ax^2+bx+c)$ …①

$x^3-1=0$ の解は $x=1, \omega, \overline{\omega}$ である．$\left(\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

①に $x=1$ と $x=\omega$ をそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots ② \\ a\omega^2+b\omega+c=\omega^{50} & \cdots ③ \end{cases}$$

$\omega^2+\omega+1=0$ と $\omega^3=1$ であることを利用すると、

③ $\Longleftrightarrow (-a+b+1)\omega+(-a+c+1)=0$

以上より、

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ -a+b+1=0 \\ -a+c+1=0 \end{cases}$$

以上より、$\underline{(a,b,c)=(1,0,0)}$

(5) n個のデータを $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ とする。

$\overline{x} = 3$, $S_x^2 = 2$ である.

$y_i = 2x_i + 1 \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ と定義する.

$\overline{y} = 2\overline{x} + 1 = 7$ であり、

$y_i - \overline{y} = (2x_i + 1) - (2\overline{x} + 1) = 2(x_i - \overline{x})$ より、

$S_y^2 = \overline{(y_i - \overline{y})^2} = 4\overline{(x_i - \overline{x})^2} = 4S_x^2 = \underline{8}$

$\boxed{\text{II}}$ (1) $M - m = 0 \Longleftrightarrow M = m$ となるのは、

4回とも同じ数字が書かれた球を取り出したときであるから、

その確率は $\dfrac{4}{4^4} = \underline{\dfrac{1}{64}}$ である。

$M - m = 1 \Longleftrightarrow M = m + 1$ となるのは、

4回の操作で取り出される球に書かれた数字が

1と2, 2と3, 3と4 のときである。

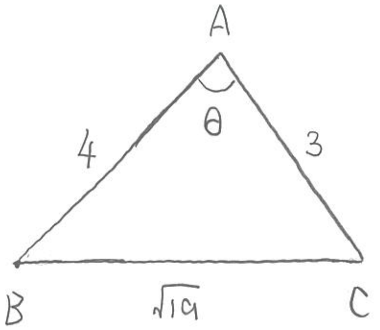
4回の操作で取り出される球に書かれた数字が

1と2である場合は14通りある。

$\left(\begin{array}{l} \text{1が3回, 2が1回} \cdots \text{4通り} \\ \text{1が2回, 2が2回} \cdots {}_4C_2 = \text{6通り} \\ \text{1が1回, 2が3回} \cdots \text{4通り} \end{array}\right)$

以上より、求める確率は $\dfrac{14 \times 3}{4^4} = \underline{\dfrac{21}{128}}$

Ⅲ



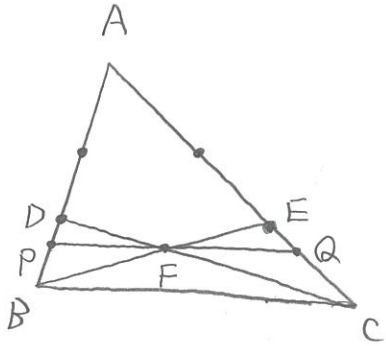
(1) △ABCについて余弦定理を用いると、

$$\cos\theta = \frac{4^2+3^2-\sqrt{19}^2}{2\cdot 4\cdot 3} = \underline{\frac{1}{4}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \underline{-\frac{7}{8}}$$

(2)
$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$
$$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$$
$$= \underline{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1} = \underline{\frac{17}{32}}$$

Ⅳ



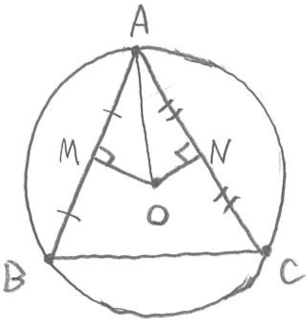
(1) △ABEと直線CDについて
メネラウスの定理を用いると、

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}\times\frac{FE}{BF} = 1$$

したがって、BF : FE = 3 : 2 より、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AE} = \underline{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$$

(2)



左図より、$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = AM \times AB = \frac{1}{2}AB^2$

したがって、$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ のとき、

$\frac{2}{5}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$ より、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \underline{\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}$$

(3) $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5p}\overrightarrow{AP} + \frac{2}{5q}\overrightarrow{AQ}$

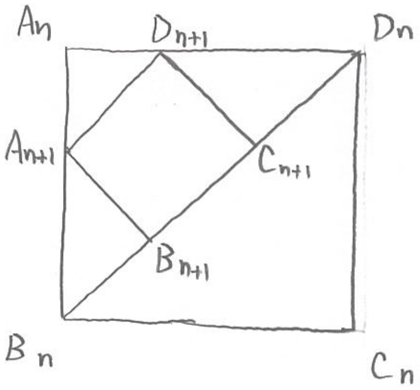
点Fは線分PQ上の点であるから、$\frac{2}{5p} + \frac{2}{5q} = 1$ より、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underline{\frac{5}{2}}$

相加平均と相乗平均の関係より、

$\frac{5}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{pq}}$（等号は $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{5}{4}$ のとき成立）

以上より、$\triangle APQ = pq \geqq \underline{\frac{16}{25}}$（等号は $p = q = \frac{4}{5}$ のとき成立）

V 正方形$A_nB_nC_nD_n$の一辺の長さをa_nとする。



$A_nA_{n+1}+A_{n+1}B_n=A_nB_n$より、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}+\sqrt{2}a_{n+1}=a_n$$

したがって、

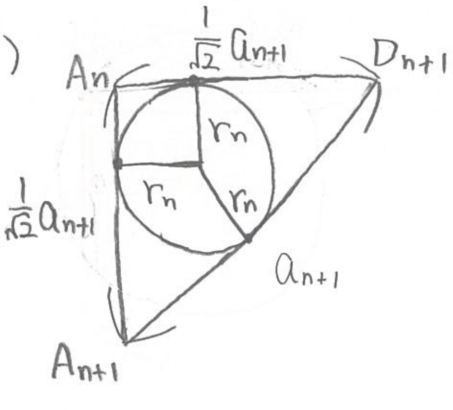
$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{3}a_n \end{cases}$$ であるから、$a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=a_n^2=\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

(1) $S_2=\underline{\frac{2}{9}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1-\frac{2}{9}}=\underline{\frac{9}{7}\left\{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right\}}$

(3)



$\triangle A_nA_{n+1}D_{n+1}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1}+a_{n+1}\right)r_n$$

より、$r_n=\frac{\sqrt{2}-1}{2}a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$

したがって、

$$r_1=\underline{\frac{2-\sqrt{2}}{6}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{1-\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{4-\sqrt{2}}{14}$$

$\boxed{\text{VI}}$ $f(x) = x\log(x+1)\ (x > -1)$

(1) $f'(x) = \log(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

$= \underline{\log(x+1) - \dfrac{1}{x+1} + 1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \underline{\dfrac{x+2}{(x+1)^2}}$

(2) $f(x) = x \Longleftrightarrow x\{\log(x+1) - 1\} = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ e-1$

したがって、$a = \underline{e-1}$

$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は増加関数であり、

$f'(0) = 0$ であるから、

$f(x)$ は $x = \underline{0}$ において最小値 $\underline{0}$ をとる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	＼	$-$	0	$+$
$f(x)$	＼	↘	最小	↗

$S = \displaystyle\int_0^{e-1} x\log(x+1)\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{e-1}(x+1)\log(x+1)\,dx - \int_0^{e-1}\log(x+1)\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)\right]_0^{e-1} - \displaystyle\int_0^{e-1}\dfrac{1}{2}(x+1)\,dx - \Big[(x+1)\log(x+1) - x\Big]_0^{e-1}$

$= \dfrac{1}{2}e^2 - \dfrac{1}{4}\Big[(x+1)^2\Big]_0^{e-1} - 1 = \underline{\dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{3}{4}}$