医学部専門予備校　クエスト　解答速報

日本医科大学（前期）　数学　試験日 2 月 2 日（水）

[I]　$C : |z| = 2$ ——①

$$w = \frac{(4+2i)z + 4 - 4i}{z + 2 - 2i} \quad ——②$$

①のもとで $z \neq -2+2i$ であるから、

②は $w(z+2-2i) = (4+2i)z + 4 - 4i$ と同値である。

このとき、$(w-4-2i)z = -(2-2i)w + 4 - 4i$ と同値変形され、

$w = 4+2i$ と仮定すると $0 = -(2-2i)(4+2i) + 4 - 4i$

すなわち $0 = -(2-2i)(2+2i)$ となり矛盾する。

よって、$w \neq 4+2i$ ——③

③のもとで、

$$z = \frac{-(2-2i)(w-2)}{w-4-2i} \quad ——④$$

すると、①, ④より

$$\left|\frac{-(2-2i)(w-2)}{w-4-2i}\right| = 2$$

③のもとで同値変形して、

$$2\sqrt{2}\,|w-2| = 2\,|w-4-2i|$$

$$\therefore \sqrt{2}\,|w-2| = |w-4-2i| \quad ——⑤$$

$$2|w-2|^2 = |w-4-2i|^2$$

$$\Longleftrightarrow 2(w-2)\overline{(w-2)} = (w-4-2i)\overline{(w-4-2i)}$$

$$\Longleftrightarrow 2(w-2)(\overline{w}-2) = (w-4-2i)(\overline{w}-4+2i)$$

$\iff 2w\overline{w}-4w-4\overline{w}+8=w\overline{w}-(4-2i)w-(4+2i)\overline{w}+20$

$\iff w\overline{w}-2iw+2i\overline{w}-12=0$

$\iff (w+2i)(\overline{w}-2i)-4-12=0$

$\iff (w+2i)\overline{(w+2i)}=16$

$\iff |w+2i|^2=16 \quad \iff |w+2i|=4$ ――⑥

⑥は③を満たすので，

$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \iff \begin{cases} ④ \\ ⑥ \end{cases}$

が成立する。

よって，点Q(w)は $\alpha=-2i$ を中心とする半径 $r=4$ の円上を動く。

$\boxed{ア}=2$　　　　$\boxed{イ}=4$

（⑤から⑥を導く別解）

（別解1）　$z=x+yi$ (x, y：実数) とおくと，

⑤ $\iff 2\{(x-2)^2+y^2\}=(x-4)^2+(y-2)^2$

$\iff x^2+y^2+4y-12=0$

$\iff x^2+(y+2)^2=16$

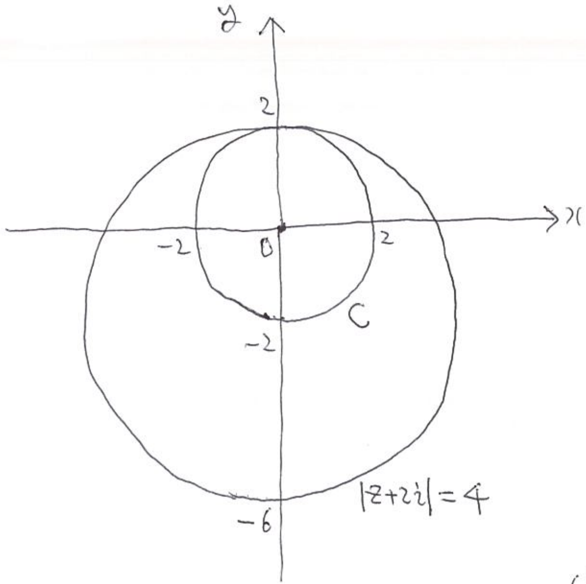
$\iff |z+2i|=4$

（別解2）　D(2)，E($4+2i$) とおいて，

⑤ $\iff |w-2|:|w-4-2i|=1:\sqrt{2}$

$\iff \mathrm{DQ}:\mathrm{EQ}=1:\sqrt{2}$

よって，アポロニウスの円についての結果を利用して，
点Qの軌跡は，線分DEを $1:\sqrt{2}$ に内分する点F，
外分する点Gを結んだ線分FGを直径とする円
となる．F$(2\sqrt{2}+2(\sqrt{2}-1)i)$，G$(-2\sqrt{2}-2(\sqrt{2}+1)i)$ となるので，
FGの中点は $-2i$，FG $=8$ より，中心 $-2i$，半径4の円となる．



2円 C：$|z|=2$ と $|z+2i|=4$ は，
左図よりただ1つの共有点 $z=2i$ をもつ．
これより，もし $z=w$ を満たす点が存在すると
するなら $z=2i$ 以外には存在しえない。
ここで、②に $z=2i$ を代入すると，

$$w=\frac{(4+2i)\cdot 2i+4-4i}{2i+2-2i}=\frac{8i-4+4-4i}{2}=2i$$

となり確かに $z=w$ を満たすので適する．

（(別解) 方程式 $\dfrac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}=z$ を解くと，
$z=-2i,\ 2+2i$ を得る．$|z|=2$ より $z=-2i$）

したがって、$\beta=2i$

このとき、$z\neq 2i$ のもとで，

$$\frac{z-w}{z-\beta}=\frac{z-\dfrac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}}{z-2i}=\frac{z(z+2-2i)-(4+2i)z-4+4i}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$=\frac{z^2-(2+4i)z-4+4i}{(z-2i)(z+2-2i)}=\frac{(z-2i)(z-2-2i)}{(z-2i)(z+2-2i)}$$

$$=\frac{z-2-2i}{z+2-2i}$$

$\boxed{ウ}=2$，$\boxed{エ}=2$，$\boxed{オ}=2$，$\boxed{カ}=2$

ここで、M$(-2+2i)$, N$(2+2i)$ とおくと，

$$\frac{PQ}{BP}=\left|\frac{z-w}{z-\beta}\right|=\left|\frac{z-2-2i}{z+2-2i}\right|=\frac{NP}{MP}$$

が成立するので，

$$\sqrt{5}PQ\leqq BP \iff \sqrt{5}NP\leqq MP \iff \sqrt{5}|z-2-2i|\leqq|z+2-2i|$$

$$\iff 5|z-2-2i|^2\leqq|z+2-2i|^2$$

$$\iff 5(z-2-2i)\overline{(z-2-2i)}\leqq(z+2-2i)\overline{(z+2-2i)}$$

$$\iff 5(z-2-2i)(\bar{z}-2+2i)\leqq(z+2-2i)(\bar{z}+2+2i)$$

$$\iff 5z\bar{z}-5(2-2i)z-5(2+2i)\bar{z}+40\leqq z\bar{z}+(2+2i)z+(2-2i)\bar{z}+8$$

$$\iff z\bar{z}-(3-2i)z-(3+2i)\bar{z}+8\leqq 0$$

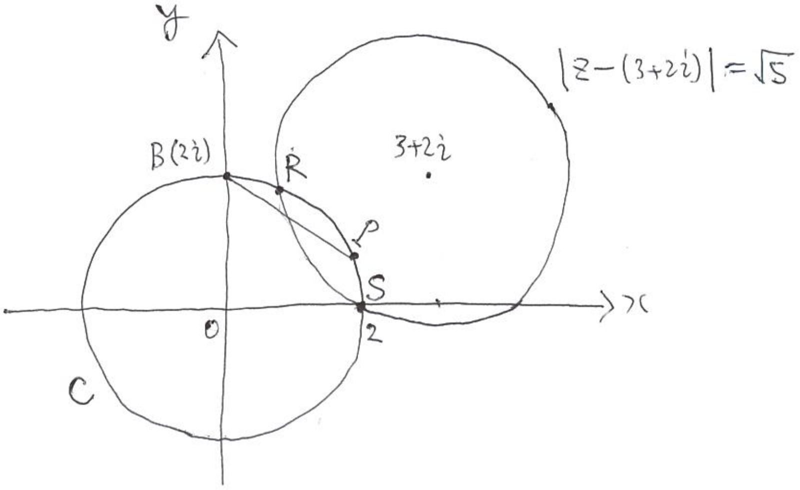
$$\iff \{z-(3+2i)\}\{\bar{z}-(3-2i)\}-13+8\leqq 0$$

$$\iff \{z-(3+2i)\}\overline{\{z-(3+2i)\}}\leqq 5 \iff |z-(3+2i)|^2\leqq 5$$

したがって，$|z-(3+2i)|\leqq\sqrt{5}$ となるので，

点P(z)が，円C：$|z|=2$ のうち $|z-(3+2i)|\leqq\sqrt{5}$ に含まれる部分を動くとき，

$\mathrm{BP}=|z-2i|$ の最大値，最小値を求めればよい．



2円 $|z|=2$，$|z-(3+2i)|=\sqrt{5}$ は2交点をもつので，それらを左図のように R，S とおく．

点P(z)が円C：$|z|=2$ の弧RSのうち短かい方（劣弧）の上を動くときの BPの長さの最大値，最小値を求める．

点Pが点Rから点Sまで動くとき BPの長さは単調増加することから，

BPの最大値は BSの長さ，最小値は BRの長さに等しい．

$z=x+yi$（x, y：実数）とおくと，

$$\begin{cases}|z|=2\\|z-(3+2i)|=\sqrt{5}\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2=4\\(x-3)^2+(y-2)^2=5\end{cases}$$

これを解いて，$(x, y)=\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$，$(2, 0)$ を得るので，

$\mathrm{R}\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$ で BPは最小値 $\mathrm{BR}=\frac{2\sqrt{26}}{13}$

$\mathrm{S}(2, 0)$ で BPは最大値 $\mathrm{BS}=2\sqrt{2}$

をとる．

$\boxed{キ}=2$，$\boxed{ク}=2$，

$\boxed{ケ}=2$，$\boxed{コ}=26$，$\boxed{サ}=13$

[II] 問1．XをAから球が取り出される事象，Yを赤球が取り出される事象とする．

このとき，$p = P_Y(X) = \dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$ となる．

ここで，$P(X\cap Y) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{6n}$

$P(Y) = P(X\cap Y) + P(\overline{X}\cap Y) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{x}{n} + \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{y}{n} = \dfrac{x+5y}{6n}$

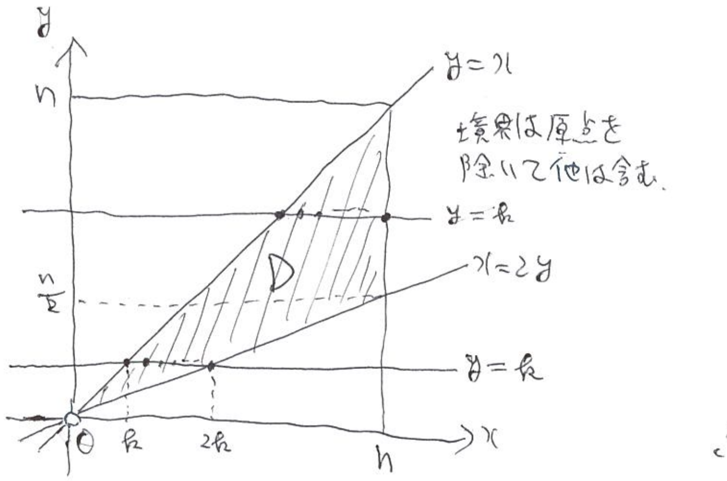
となるから，

$$p = \frac{x}{x+5y} \quad \text{(答)}$$

問2．$1 \leqq x \leqq n$，$1 \leqq y \leqq n$ のもとで，

$$\frac{1}{6} \leqq p \leqq \frac{2}{7} \iff \frac{1}{6} \leqq \frac{x}{x+5y} \leqq \frac{2}{7} \iff \begin{cases} x+5y \leqq 6x \\ 7x \leqq 2x+10y \end{cases} \iff \begin{cases} y \leqq x \\ x \leqq 2y \end{cases}$$

となるので，領域 $D: \begin{cases} 0 < x \leqq n \\ 0 < y \leqq n \\ y \leqq x \\ x \leqq 2y \end{cases}$ に含まれる格子点の個数を求めればよい．



直線 $y=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ と D の共通部分に含まれる格子点の個数を a_k とすると，

$$a_k = \begin{cases} 2k-k+1 & \left(1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}\right) \\ n-k+1 & \left(\frac{n}{2} \leqq k \leqq n\right) \end{cases}$$

$$\therefore\ a_k = \begin{cases} k+1 & \left(1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}\right) \\ n+1-k & \left(\frac{n}{2} \leqq k \leqq n\right) \end{cases}$$

(i) nが偶数のとき

$$N(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k+1) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(n+1-k) = \frac{\frac{n}{2}}{2}\left(2+\frac{n}{2}+1\right) + \frac{\frac{n}{2}}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$
$$= \frac{n^2+4n}{4}$$

(ii) nが奇数のとき

$$N(n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k+1) + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(n+1-k) = \frac{\frac{n-1}{2}}{2}\left(2+\frac{n-1}{2}+1\right) + \frac{\frac{n+1}{2}}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$$
$$= \frac{n^2+4n-1}{4}$$

以上より，

$$N(n) = \begin{cases} \dfrac{n^2+4n}{4} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{n^2+4n-1}{4} & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

問3．(i) nが偶数のとき，$n=2m$ とおくと，

$$N(2m) = m^2+2m = (m+1)^2-1$$

$m=43$ のとき　$N(86) = 44^2-1 = 1935$

$m=44$ のとき　$N(88) = 45^2-1 = 2024$

よって，$N(n)$の単調増加性より，$N(2m) < 2022$ となる最大のnは $n=86$

(ii) nが奇数のとき，$n=2m-1$ とおくと，

$$N(2m-1) = m^2+m-1 = m(m+1)-1$$

$m=44$ のとき　$N(87) = 44\cdot45-1 = 1979$

$m=45$ のとき　$N(89) = 45\cdot46-1 = 2069$

よって，$N(n)$の単調増加性より，$N(2m-1) < 2022$ となる最大のnは $n=87$

以上 (i), (ii) より，

$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数nは　$n=87$ (答)

[Ⅲ] 問1. Cとlの共有点のx座標が満たす方程式は、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-mx+k)^2}{b^2}=1 \quad \text{より} \quad (a^2m^2+b^2)x^2-2a^2mkx+a^2k^2-a^2b^2=0 \quad \text{—①}$$

$a^2m^2+b^2>0$ より ①は2次方程式となり、接するので重解をもつことから、

判別式をDとすると、

$$D/4=a^4m^2k^2-(a^2m^2+b^2)(a^2k^2-a^2b^2)=a^2b^2(a^2m^2-k^2+b^2)=0$$

よって、$k^2=a^2m^2+b^2$ となり、$k>0$ より $k=\sqrt{a^2m^2+b^2}$ —②

このとき、①の重解は、

$$x=\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2} \quad \text{となり、②より} \quad x=\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

すると、②より

$$y=-mx+k=\frac{-a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\sqrt{a^2m^2+b^2}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

以上より

$$A\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) \quad \text{(答)}$$

問2. ②よりlの方程式は $l: mx+y-\sqrt{a^2m^2+b^2}=0$ となるので、

点Oから直線lまでの距離より

$$OH=\frac{|m\cdot 0+0-\sqrt{a^2m^2+b^2}|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{(答)}$$

問3. 問1より

$$OA=\sqrt{\frac{a^4m^2}{a^2m^2+b^2}+\frac{b^4}{a^2m^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}}$$

よって、

$$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}-\frac{a^2m^2+b^2}{m^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)-(a^2m^2+b^2)^2}{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}=\sqrt{\frac{(a^4-2a^2b^2+b^4)m^2}{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}} \quad (\because\ 0<b<a \text{ より } a^2-b^2>0)$$

これより、

$$\sin\theta = \frac{AH}{OA} = \frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)(m^2+1)}} \cdot \sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{a^4m^2+b^4}}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)}} \quad (\text{答})$$

問4.

$$\sin\theta = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{\dfrac{a^4m^4+(a^4+b^4)m^2+b^4}{m^2}}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4m^2+\dfrac{b^4}{m^2}+a^4+b^4}}$$

ここで、$a^4m^2>0$, $\dfrac{b^4}{m^2}>0$ なので、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\leqq \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2\sqrt{a^4m^2\cdot\dfrac{b^4}{m^2}}+a^4+b^4}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

等号は、$a^4m^2=\dfrac{b^4}{m^2}$ より $m=\dfrac{b}{a}$ のとき成立する。

よって、$\sin\theta$ の最大値 $M(a,b)$ は、

$$M(a,b) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \quad (\text{答})$$

問5. $\begin{cases} a-b=X \\ b=Y \end{cases}$ とおくと、$a>b>0$ より $\begin{cases} a-b>0 \\ b>0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} X>0 \\ Y>0 \end{cases}$ であり

$$(a-b)^2+(b-1)^2 \leqq \frac{3}{4} \iff X^2+(Y-1)^2 \leqq \frac{3}{4}$$

ここで、

$$M(a,b) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(X+Y)^2-Y^2}{(X+Y)^2+Y^2} = \frac{(X+Y)^2+Y^2-2Y^2}{(X+Y)^2+Y^2}$$

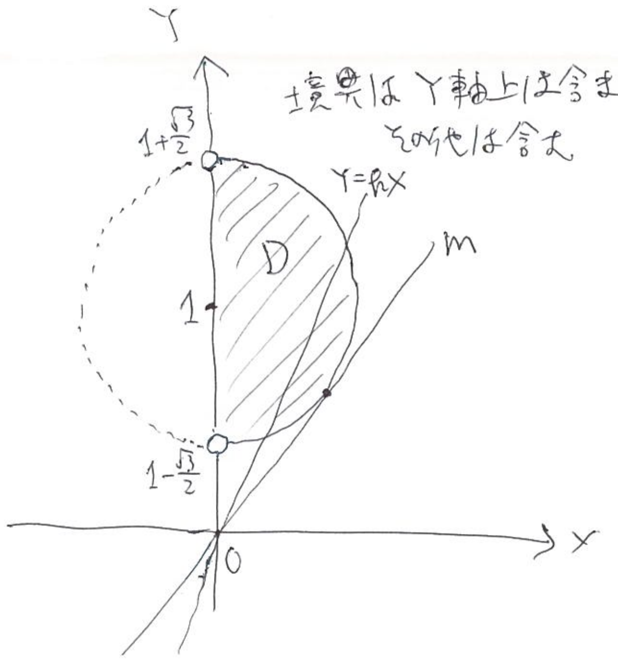
$$= 1-\frac{2Y^2}{(X+Y)^2+Y^2} = 1-\frac{2}{\left(\frac{X}{Y}+1\right)^2+1}$$

となるので、$M(a,b)$ が最大となるのは、$\dfrac{X}{Y}$ が最大となるとき、

すなわち $\dfrac{Y}{X}$ が最小となるときである（$\begin{cases} X>0 \\ Y>0 \end{cases}$ のもとで）。

このとき、$\dfrac{Y}{X}=k$ とおいて、

領域 $D: \begin{cases} X>0 \\ Y>0 \\ X^2+(Y-1)^2 \leqq \frac{3}{4} \end{cases}$ と直線 $Y=kX$ が共有点をもつような傾き k の最小値を求めればよい。



左図の接線mのとき傾きkは最小となる。

直線 $kX-Y=0$ が

中心$(0,1)$，半径$\frac{\sqrt{3}}{2}$の円に

接する条件より

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k^2+1=\frac{4}{3}$$

$k>0$より

$$k=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、$\frac{Y}{X}=\frac{1}{\sqrt{3}}$のとき$M(a,b)$は最大である。

このとき、求める最大値は

$$(\text{最大値})=1-\frac{2}{(\sqrt{3}+1)^2+1}=\frac{3+4\sqrt{3}}{13}\quad(\text{答})$$

Ⅳ 問1　$0<x<1$ において．

$$\log|f(x)| = \frac{1}{2}\left(\log|1-\sqrt{x}| - \log|1+\sqrt{x}|\right)$$

両辺を微分して，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

よって．$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}\,(\sqrt{1+\sqrt{x}})^3}$

$0<x<1$ で $f'(x)<0$ より $y=f(x)$ は単調減少する．

このとき，

$$\log|f'(x)| = -\log 2 - \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}\log|1-\sqrt{x}| - \frac{3}{2}\log|1+\sqrt{x}|$$

両辺を微分して．

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x-\sqrt{x}-1}{2x(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}$$

よって．

$$f''(x) = \frac{3x-\sqrt{x}-1}{2x(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}\,(\sqrt{1+\sqrt{x}})^3}$$

$$= \frac{-(3x-\sqrt{x}-1)}{4x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}}$$

ここで．$f''(x)=0$ となる x を求めると．

$3x-\sqrt{x}-1=0$ より $3(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1=0$

$\therefore\ \sqrt{x} = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

$\sqrt{x}\geqq 0$ より $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

よって．$x = \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{18}$

$$f''(x) = \frac{-3\left(\sqrt{x}-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}}$$ より符号変化に注意して

増減表を作成すると

x	0	$\cdots$	$\frac{7+\sqrt{13}}{18}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘		↘	0

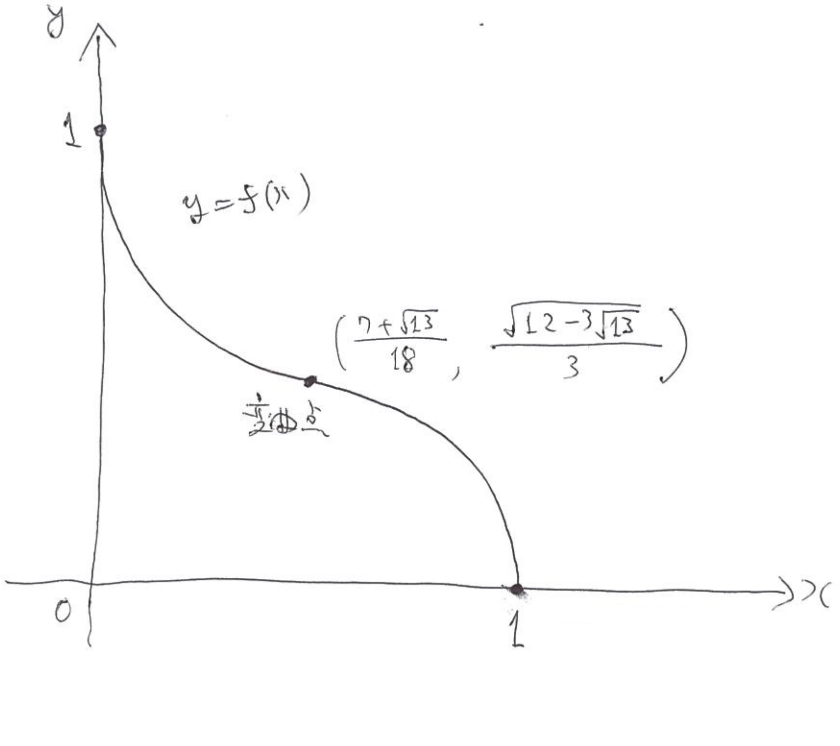
よって、$x=\frac{7+\sqrt{13}}{18}$ で変曲点となり、$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ より

$$f\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{13}}{6}}{1+\frac{1+\sqrt{13}}{6}}}=\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$$

以上より、$y=f(x)$ の変曲点の座標は

$$\left(\frac{7+\sqrt{13}}{18},\ \frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}\right) \quad (答)$$

$\lim_{x\to+0} f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1-0} f'(x)=-\infty$ に注意してグラフの概形を描くと



問2. $y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ より $y^2=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ すなわち $\sqrt{x}=\dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

$$\therefore\ x=\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$$

よって、

$$V=\int_0^1 \pi x^2\,dy=\int_0^1 \pi\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^4 dy$$

(ここで、$y=\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと、

$$\frac{1-y^2}{1+y^2}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\ \text{より}$$

y	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$dy=\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta\ )$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^4\theta\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^4\theta\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}d\theta$$

(x^4 を $x+1$ で割って $x^4=(x+1)(x^3-x^2+x-1)+1$ より

$$\frac{\cos^4\theta}{1+\cos\theta}=\cos^3\theta-\cos^2\theta+\cos\theta-1+\frac{1}{1+\cos\theta}\ )$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\theta-\cos^2\theta+\cos\theta-1+\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}+\cos\theta-1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$=\pi\left[\frac{1}{12}\sin3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta+\sin\theta-\theta+\frac{1}{2}\cdot2\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{\pi}{4}-0+1-\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$=\frac{8}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi^2\quad(\text{答})$$