医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和大学Ⅰ期　医学部　数学　試験日2月4日（金）

$\boxed{1}$　$z^3 = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^3 = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ここで、$2\alpha z^3 = (1-t)\alpha + t$ を変形して　$(1-\alpha)t = (2z^3 - 1)\alpha$

これに $z^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を代入して　$(1-\alpha)t = -\sqrt{3}i\alpha$

このとき、$\alpha = 1$ と仮定すると $0 = -\sqrt{3}i$ となり矛盾するから　$\alpha \neq 1$ ――①

よって　①のもとで　$t = \dfrac{-\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha}$ となる。

tは実数であるから、実数条件より

$$\overline{\left(\frac{-\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha}\right)} = \frac{-\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha} \iff \frac{\sqrt{3}i\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} = \frac{-\sqrt{3}i\alpha}{1-\alpha}$$

①のもとで分母をはらっても同値であり、

$$\bar{\alpha}(1-\alpha) = -\alpha(1-\bar{\alpha}) \iff \alpha\bar{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\bar{\alpha} = 0$$

$$\iff \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \iff \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\overline{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\iff \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \iff \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$ （①より $\alpha = 1$ を除く）

よって、複素数αが描く図形は、$\frac{1}{2}$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円から点1を除いた図形である。

（答）(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) 1

次に、$z^6 = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^6 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のもと、

$\beta = \dfrac{z^6}{\alpha}$ とすると、$\alpha \neq 0$ のもとで $\alpha\beta = z^6$ となり、$\beta = 0$ と仮定すると

$0 = z^6$ となり矛盾するから $\beta \neq 0$ ――②

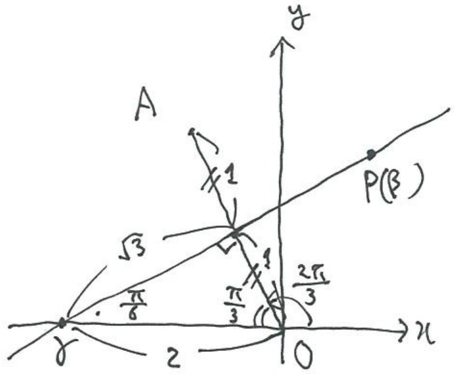
よって、②のもとで　$\alpha = \dfrac{z^6}{\beta}$ となるので、これを $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ に代入して、

$\left|\dfrac{z^6}{\beta}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ を得るが、②のもとで分母をはらっても同値であり、

$|2z^6-\beta|=|\beta|$ すなわち $|\beta-2z^6|=|\beta|$ を得る（これは②を満たす）。

そこで、$P(\beta)$, $A(2z^6)$ とし、原点を O とすると、この方程式は $AP=OP$ を意味するので、点 $P(\beta)$ の軌跡は、線分 OA の垂直二等分線となる。

$2z^6=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ に注意して図示すると、



線分 OA の垂直二等分線と x 軸の交点を表す γ は、図より $\gamma=-2$ である。

（答）(4) -2

（別解）$\beta=x+yi$（x, y：実数）とおくと

$|\beta+1-\sqrt{3}i|=|\beta|$ より

$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=x^2+y^2$

$\therefore\ x-\sqrt{3}y+2=0$

$y=0$ を代入して $x=-2$ より $\gamma=-2$

また、$1-\dfrac{z^6}{\gamma}=1-\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって、$-\pi<\theta\leqq\pi$ より、

$\theta=\arg\left(1-\dfrac{z^6}{\gamma}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

（答）(5) $\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{2}$ (1) 余弦定理より　$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$ であるから

$$(\sqrt{3})^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

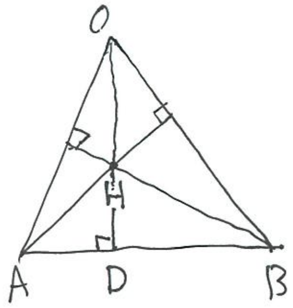
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{4+5-3}{2} = 3 \quad (答)$$

(別解)　$AB=\sqrt{3}$ より　$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 3$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 3$$

$$5 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4 = 3 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$$

(2)



$\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立より　$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ (s, t：実数) と表せる.

$$\begin{cases}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{OB}\end{cases} \text{より} \begin{cases}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB} = 0\end{cases}$$

このとき.

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA} = \{s\vec{a} + (t-1)\vec{b}\}\cdot\vec{a} = s|\vec{a}|^2 + (t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} = 4s + 3(t-1)$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB} = \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\}\cdot\vec{b} = (s-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 3(s-1) + 5t$$

よって. $\begin{cases}4s+3t=3\\ 3s+5t=3\end{cases}$ となるので、これを解いて $\begin{cases}s=\frac{6}{11}\\ t=\frac{3}{11}\end{cases}$

以上より.　$\overrightarrow{OH} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b}$ (答)

(3)(a) $\overrightarrow{OH} = \frac{9}{11}\cdot\frac{6\vec{a}+3\vec{b}}{9} = \frac{9}{11}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ より $\overrightarrow{OH} = \frac{9}{11}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

となるので. 点Dは線分ABを 1:2 に内分する点である.

よって.　$l_1 = AD = \frac{1}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (答)

(b) $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$ (答)

(4) 余弦定理より

$$\cos\angle AOB = \frac{2^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

よって. $\sin\angle AOB = \sqrt{1-\cos^2\angle AOB} = \sqrt{1-\frac{9}{20}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$

このとき. 正弦定理より.

$$\frac{AB}{\sin\angle AOB} = 2R \quad すなわち \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{165}}{11} \quad (答)$$

(5) $\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立より、$\overrightarrow{OG}=p\vec{a}+q\vec{b}$ (p, q：実数) と表せる。

OA, OB の中点をそれぞれ M, N とおくて、

$$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+q\vec{b},\quad \overrightarrow{NG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{ON}=p\vec{a}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\vec{b}$$

ここで、$\begin{cases}\overrightarrow{MG}\perp\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{NG}\perp\overrightarrow{OB}\end{cases}$ より $\begin{cases}\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{OA}=0\\ \overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{cases}$

このとき、

$$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(p-\frac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=4\left(p-\frac{1}{2}\right)+3q$$

$$\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{OB}=p\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(q-\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2=3p+5\left(q-\frac{1}{2}\right)$$

よって、$\begin{cases}4p+3q=2\\ 3p+5q=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ となるので、これを解いて $\begin{cases}p=\dfrac{5}{22}\\ q=\dfrac{4}{11}\end{cases}$

以上より、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{5}{22}\vec{a}+\frac{4}{11}\vec{b}\quad (答)$$

(別解) 一般に、次の結果が知られている。

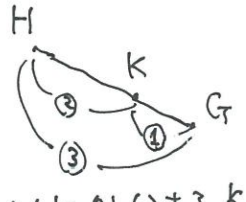
> △ABC の外心を O，重心を G，垂心を H とすると、
> 3点 O，G，H はこの順に一直線上に並び
> OG：GH＝1：2 が成立する。
> (3点 O, G, H を含むこの直線をオイラー線という)

結果のみを答える形式であるから、これを利用することもできる。

△OAB の重心を K とおくと、本問の設定では

垂心 $\overrightarrow{OH}=\dfrac{6}{11}\vec{a}+\dfrac{3}{11}\vec{b}$

重心 $\overrightarrow{OK}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$



GK：KH＝1：2 より、G は HK を 3：1 に外分する点より

$$\overrightarrow{OG}=\frac{-1\cdot\overrightarrow{OH}+3\cdot\overrightarrow{OK}}{3-1}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{11}a+\frac{3}{11}\vec{b}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{5}{22}\vec{a}+\frac{4}{11}\vec{b}$$ と求めることもできる。

(記述式の場合は、証明なしで上の結果を用いることは避けること)

$\boxed{3}$ (1)(1−1) 点Pの速さ1で P(0, t) より t は時刻を表す。

よって、題意の設定より $Q\left(\cos\frac{\pi t}{2},\ \sin\frac{\pi t}{2}\right)$ (答)

$0 \leqq t < 1$ より $\cos\frac{\pi t}{2} \neq 0$ であるから、直線PQの方程式は、

$$PQ:\ y = \frac{t-\sin\frac{\pi t}{2}}{-\cos\frac{\pi t}{2}}x + t$$

よって $x=-1$ を代入すると

$$y = \frac{t-\sin\frac{\pi t}{2}}{\cos\frac{\pi t}{2}} + t$$

したがって、$R\left(-1,\ \frac{t-\sin\frac{\pi t}{2}}{\cos\frac{\pi t}{2}} + t\right)$ (答)

(1−2) $t=1-u$ とおくと、$t \to 1-0$ のとき $u \to +0$ であり、

$$\lim_{t\to 1-0}\left(\frac{t-\sin\frac{\pi t}{2}}{\cos\frac{\pi t}{2}} + t\right) = \lim_{u\to +0}\left(\frac{1-u-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)} + 1-u\right)$$

$$= \lim_{u\to +0}\left(\frac{1-u-\cos\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}} + 1-u\right) = \lim_{u\to +0}\left(\frac{1-\cos\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}} - \frac{u}{\sin\frac{\pi u}{2}} + 1-u\right)$$

$$= \lim_{u\to +0}\left(\frac{\sin\frac{\pi u}{2}}{1+\cos\frac{\pi u}{2}} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}} + 1-u\right)$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi}\cdot 1 + 1 - 0 = 1-\frac{2}{\pi}$$

よって、Rが近づく点の座標は $\left(-1,\ 1-\frac{2}{\pi}\right)$ (答)

(2)(2−1) $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ となるので、円 $x^2+y^2=1$ の第1象限の部分と x 軸、y 軸で囲まれた領域の面積に等しいので、半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ より

$$I_1 = \frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (答)$$

(2−2) $I_{n+2} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}dx = \int_0^1 (x)'(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}dx$

$$= \left[x(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{n+2}{2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\cdot(-2x)\,dx$$

$$= 0 + (n+2)\int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx = (n+2)\int_0^1\{1-(1-x^2)\}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$$

$$= (n+2)\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx - (n+2)\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}dx = (n+2)I_n - (n+2)I_{n+2}$$

よって、$I_{n+2} = (n+2)I_n - (n+2)I_{n+2}$ となるので、$I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3}I_n$ (答)

(2-3)　(2-2)で求めた漸化式より．

$$I_5=\frac{5}{6}I_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_1=\frac{5}{8}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{32}\ (答)$$

(補足)　$I_n=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$ において．

$x=\cos\theta$ とおくと　$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$　$\begin{array}{c|c} x & 0\longrightarrow 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\longrightarrow 0\end{array}$　より

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}}(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\theta\, d\theta$$

$\therefore\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\, d\theta$ が成立する．この形に直して考えてもよい．

$\boxed{4}$ (1)　$5!=120$ (答)

(2)　A, O, P, W, H, H, S, S, T, T で同じものを含む順列を考える．

(2-1)　$\frac{10!}{2!2!2!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{8}=90\times5040=453600$ (答)

（7! = 5040を覚えていると速い）

(2-2)　2つのS，2つのTを固まりにして、A, O, P, W, H, H, SS, TT の順列を考えると．

$$\frac{8!}{2!}=\frac{8\times7!}{2}=4\times5040=20160\ (答)$$

(2-3)　求める場合の数は．補集合を考えて、全体からSHSHを含む順列を引くことで求まる．

A, O, P, W, SHSH, T, T の順列は $\frac{7!}{2!}=\frac{5040}{2}=2520$

よって．求める場合の数は．

$$453600-2520=451080\ (答)$$

(2-4)「STという並びまたはTSという並びの少なくとも一方を含む」の否定は、「SとTが隣り合わない」であるから、求める場合の数は、全体から補集合の「SとTが隣り合わない」場合の数を引くことで求まる。

SとTが隣り合わない場合について考える。

まず、A, O, P, W, H, H を並べて $\left(\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360\text{通り}\right)$、

両端またはすき間に S, S, T, T を入れることを考える。

例えば PHOAHW という並びとすると

$\wedge P \wedge H \wedge O \wedge A \wedge H \wedge W \wedge$　この7ヶ所のどこかに S, S, T, T を入れる。

（ただし、S2つ または T2つは隣り合ってもよい。）

(i) SS , TT の2つの固まりを入れるとき

$7\times 6=42$ 通り

(ii) SS, T, T の3つを入れるとき、

$\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2!}=105$ 通り

(iii) S, S , TT の3つを入れるとき、

(ii)と同様に 105通り

(iv) S, S, T, T の4つを入れるとき、

$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2!2!}=210$ 通り

以上より、補集合の場合の数は

$360\times(42+105+105+210)=360\times 462=166320$

したがって、求める場合の数は、

$453600-166320=287280$ （答）