医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京医科大学　数学　　試験日2月5日（土）

第1問

(1) Pにおける接線は $\dfrac{ax}{8}+\dfrac{by}{3}=1$ だから

Pにおける法線の方程式は

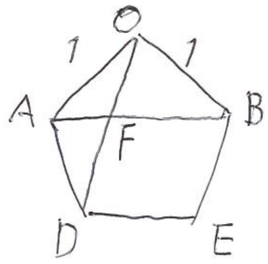
$$\frac{b}{3}(x-a)-\frac{a}{8}(y-b)=0$$

$$bx-ab-\frac{3}{8}ay+\frac{3}{8}ab=0$$

よって $bx-\dfrac{3}{8}ay=\dfrac{5}{8}ab$ …(答)

(2) 正十二面体の1つの面は正五角形だから

3点 O, A, B を含む正五角形を OADEB とする.



ABとODの交点をFとすると

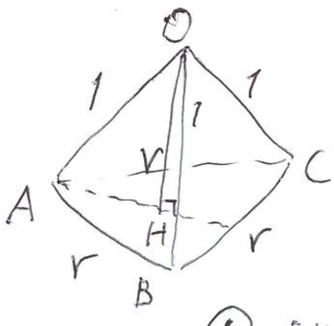
△FOA ∽ △ADO より

$(r-1):1=1:r \quad \therefore r(r-1)=1$ …①

これを変形して $(r-1)^2=2-r$ …(答)

$|\overrightarrow{AB}|=r$ より $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=r^2 \quad \therefore |\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2=r^2$

よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{2}r$ …(答)



左図の四面体の体積がVであり.

$\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2$

Oから△ABCに下ろした垂線の足をHとすると

$AH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$ より $OH=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}r^2}$

① より $r^2=r+1$ だから $OH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2-r}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(r-1)$

$V=\dfrac{1}{3}\triangle ABC\cdot OH=\dfrac{1}{12}r^2(r-1) \quad \therefore \dfrac{V}{r}=\dfrac{1}{12}r(r-1)$

① より $\dfrac{V}{r}=\dfrac{1}{12}$ …(答)

(3) 被積分関数は偶関数だから，求める積分を I とすると，

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x)'}{\sqrt{9+7\tan x}}\,dx = 2\left[\frac{2}{7}\sqrt{9+7\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4}{7}(4-3) = \underset{\sim\sim}{\frac{4}{7}} \quad \cdots (答)$$

(4) 求める積分を J とすると

$$J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan x}}{1-\sin x}\,dx$$

第1項の積分を K として，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$

x	$-\frac{\pi}{4} \to 0$
t	$\frac{\pi}{4} \to 0$

より

$$K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sqrt{4+5\tan|-t|}}{1+\sin t}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan t}}{1+\sin t}\,dt$$

よって

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right)\sqrt{4+5\tan x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cdot\frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = 2\left[\frac{2}{15}(4+5\tan x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4}{15}(27-8) = \underline{\frac{76}{15}} \quad \cdots (答)$$

〈講評〉(1) 法線ベクトルの直交条件を用いるとやりやすい．

(2) 正十二面体の1つの面が正五角形であることを知っていれば，正五角形の性質を使うだけである．

(3) 基本

(4) 積分区間を分割して，片方に置換を用いる典型的なパターンである．

第２問

(1) 点Pの時刻 t における速度を $\vec{v}$ とすると

$$\vec{v} = (t^3,\ \sqrt{3}\,t^4)$$

よって速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}| = t^3\sqrt{1+3t^2}$

$t=4$ における速さは　$64\sqrt{1+48} = 64\cdot 7 = \underline{448}$ …(答)

(2) 点Pの時刻 t における加速度を $\vec{\alpha}$ とすると

$$\vec{\alpha} = (3t^2,\ 4\sqrt{3}\,t^3)$$

よって加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}| = t^2\sqrt{9+48t^2}$$

$t=3$ のとき　$9\sqrt{9+48\cdot 9} = 9\cdot 3\sqrt{49} = \underline{189}$ …(答)

(3) 求める道のりを L とすると

$$L = \int_0^1 |\vec{v}|\,dt = \int_0^1 t^2\sqrt{1+3t^2}\cdot t\,dt$$

$\sqrt{1+3t^2} = s$ とおくと　$t^2 = \dfrac{s^2-1}{3}$　$\therefore\ t\,dt = \dfrac{1}{3}s\,ds$

t	$0 \to 1$
s	$1 \to 2$

$$L = \int_1^2 \frac{s^2-1}{3}\cdot s\cdot\frac{1}{3}\cdot s\,ds = \frac{1}{9}\int_1^2 (s^4-s^2)\,ds$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{3}s^3\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{5}(32-1) - \frac{1}{3}(8-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \underline{\frac{58}{135}}$$ …(答)

〈講評〉　基本

第3問

事象Aの確率は $\dfrac{{}_6C_2}{{}_9C_2}=\underset{\sim\sim}{\dfrac{5}{12}}$ …(答)

事象Bが起こるとき試行(i),(ii)ののち

当たり2本，はずれ4本となるから.

$$P_B(E)=\frac{2}{6}=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}}\quad\cdots(\text{答})$$

$P(C)=\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{1}{12}$ であり. 事象Cが起こるとき

試行(i)(ii)ののち 当たり1本，はずれ5本と

なるから　$P_C(E)=\dfrac{1}{6}$

よって　$P(C\cap E)=P(C)\cdot P_C(E)=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{6}=\underset{\sim\sim}{\dfrac{1}{72}}$ …(答)

試行(i)において事象A，B，Cのいずれかが起こり

これらは排反である. また.

$$P_A(E)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)\\&=P(A)\cdot P_A(E)+P(B)\cdot P_B(E)+P(C)\cdot P_C(E)\\&=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{72}=\underset{\sim\sim}{\frac{7}{18}}\quad\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

〈講評〉条件付き確率，確率の乗法定理

を適用する問題で，面倒なところはない.

第4問　4次方程式の解と係数の関係を利用する。

$$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

が成り立つから係数・定数項を比較して

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=8 \quad \cdots ①$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c \quad \cdots ②$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-4 \quad \cdots ③$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=-6 \quad \cdots ④$$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$ のとき ④より $\sqrt{2}\gamma\delta=-6$　$\therefore \gamma\delta=-3\sqrt{2}$

よって　$\gamma^2\delta^2=\underline{18}$ …(答)

①より　$\alpha+\beta=8-(\gamma+\delta)$

③より　$\alpha\beta(\gamma+\delta)+(\alpha+\beta)\gamma\delta=-4$

$\sqrt{2}(\gamma+\delta)+\{8-(\gamma+\delta)\}\gamma\delta=-4$

$\gamma\delta=-3\sqrt{2}$ より　$4\sqrt{2}(\gamma+\delta)=24\sqrt{2}-4$

よって　$\gamma+\delta=\underline{6-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ …(答)

②より　$c=\gamma\delta+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta$

$=\gamma\delta+\{8-(\gamma+\delta)\}(\gamma+\delta)+\alpha\beta$

$=-3\sqrt{2}+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}$

$=-3\sqrt{2}+\left(12-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}$

$=\underline{\frac{23}{2}}$ …(答)

〈講評〉4次方程式の4つの解の問題だから、解と係数の関係を利用することに気づけばよい。