医学部専門予備校　クエスト　解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学　試験日2月6日（日）

1 問1

$ax^3+(-4a+1)x^2+(a+1)x+6a=0$

が3つの異なる実数解をもつから、$a \neq 0$

左辺を $f(x)$ とおくと、$f(-1)=0$ より、$f(x)$ は $(x+1)$ で割り切れる。

$f(x)=(x+1)\{ax^2+(-5a+1)x+6a\}$

$g(x)=ax^2+(-5a+1)x+6a$ とおく。

$f(x)=0$ の異なる3つの実数解のうち、2つの絶対値が等しくなるのは

下記の2通りが考えられる。

(i) $g(x)=0$ の解に $x=1$ が含まれるとき、

$g(1)=2a+1=0$ より、$a=-\frac{1}{2}$

このとき、

$g(x)=0 \iff -\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-3=0 \iff x=1,6$

(ii) $g(x)=0$ の解が $x=\alpha, -\alpha$ $(\alpha>0)$ となるとき、

2次方程式の解と係数の関係から、

$\frac{-5a+1}{a}=0$ より、$a=\frac{1}{5}$

このとき、

$g(x)=0 \iff \frac{1}{5}x^2+\frac{6}{5}=0$ は実数解をもたないから不適

(i)(ii)より、$\underline{a=-\frac{1}{2}}$ であり、$f(x)=0$ の解は $\underline{x=\pm 1, 6}$

問2

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2x - \int_0^3 g(t)\,dt \\ g(x) = x^2 - 6x + \int_1^2 f(t)\,dt \end{cases}$$

$\int_0^3 g(t)\,dt = a$, $\int_1^2 f(t)\,dt = b$ とおくと、

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2x - a \\ g(x) = x^2 - 6x + b \end{cases}$$

$$a = \int_0^3 g(t)\,dt = \int_0^3 (t^2 - 6t + b)\,dt$$
$$= \frac{1}{3}[t^3]_0^3 - 3[t^2]_0^3 + b[t]_0^3 = 3b - 18$$

$$b = \int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 (3t^2 + 2t - a)\,dt$$
$$= [t^3]_1^2 + [t^2]_1^2 - a[t]_1^2 = -a + 10$$

以上より、

$$\begin{cases} a - 3b = -18 \\ a + b = 10 \end{cases}$$ より、$(a, b) = (3, 7)$

したがって、$\int_1^2 f(x)\,dx = b = \underline{7}$, $\int_0^3 g(x)\,dx = a = \underline{3}$

$\boxed{2}$ $f(x)$ $(x>0)$ について、

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{\log x}{x} & \cdots ① \\ f(1) = \dfrac{1}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

①より、$f(x) = \displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$

これと②より、$f(1) = C = \dfrac{1}{2}$

したがって、$f(x) = \dfrac{1}{2}(\log x)^2 + \dfrac{1}{2}$

問1　$f(x) = 1$ の解を $x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ とする。

$f(x) = 1 \Longleftrightarrow (\log x)^2 = 1 \Longleftrightarrow \log x = \pm 1 \Longleftrightarrow x = e, e^{-1}$

したがって、$\alpha = \underline{e^{-1}}$，$\beta = \underline{e^{1}}$

問2　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left\{\frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{2}\right\} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} (\log x)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\,dx$

$$\left(\begin{aligned} &\int (\log x)^2\,dx = x\cdot(\log x)^2 - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx = x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C \end{aligned}\right)$$

$= \dfrac{1}{2}\Big[x(\log x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} - \Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} + \dfrac{3}{2}\Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$= \dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right) - \left(e + \dfrac{1}{e}\right) + \dfrac{3}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right) = \underline{1e + \dfrac{-3}{e}}$

問3　曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $T(t, f(t))$ $(t>0)$ における接線を l とすると、

$l: y = \dfrac{\log t}{t}(x - t) + \left\{\dfrac{1}{2}(\log t)^2 + \dfrac{1}{2}\right\}$

$l: y = \dfrac{\log t}{t}x + \left\{\dfrac{1}{2}(\log t)^2 - \log t + \dfrac{1}{2}\right\}$

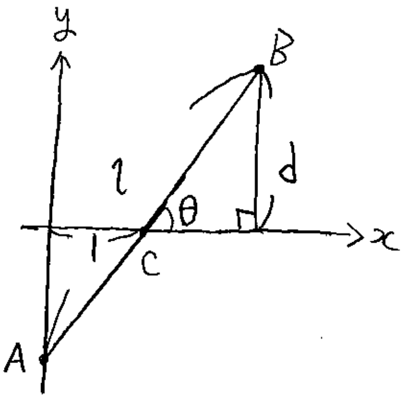
l が $(0, 2)$ を通るとき、

$\dfrac{1}{2}(\log t)^2 - \log t + \dfrac{1}{2} = 2 \Longleftrightarrow \log t = -1, 3 \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{e}, e^3$

以上より、条件を満たす直線は l_1 と l_2 の2つあり、

l_1: $\underline{y = -1e\,x + 2}$，$l_2$: $\underline{y = \dfrac{3}{e^3}x + 2}$

$\boxed{3}$ 問1.



$(l>1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$

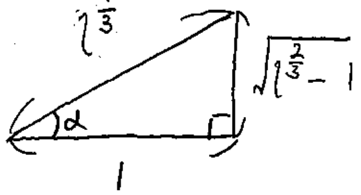
右図において、$BC = AB - AC = l - \frac{1}{\cos\theta}$

したがって、$d = BC\sin\theta = \underline{-\tan\theta + \sin\theta \cdot l}$

$d = f(\theta)$ とすると、

$f'(\theta) = -\frac{1}{\cos^2\theta} + \cos\theta \cdot l = \frac{l\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta}$

$\cos\alpha = \frac{1}{l^{\frac{1}{3}}}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ とすると、



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^{\frac{2}{3}}-1}}{l^{\frac{1}{3}}}$, $\tan\alpha = \sqrt{l^{\frac{2}{3}}-1}$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

したがって、d の最大値は、

$f(\alpha) = -\sqrt{l^{\frac{2}{3}}-1} + \frac{\sqrt{l^{\frac{2}{3}}-1}}{l^{\frac{1}{3}}} \cdot l$

$= (l^{\frac{2}{3}}-1)\sqrt{l^{\frac{2}{3}}-1} = (l^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}$

問2

$l=8$ のとき，$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ より $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であり、

d の最大値は $f(\frac{\pi}{3}) = 3^{\frac{3}{2}} = \underline{3\sqrt{3}}$

問3

$f(\alpha) \leqq 2$ であればよい。

$(l^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}} \leqq 2 \iff l^{\frac{2}{3}}-1 \leqq 2^{\frac{2}{3}} \iff l^{\frac{2}{3}} \leqq 2^{\frac{2}{3}}+1 \iff l \leqq (2^{\frac{2}{3}}+1)^{\frac{3}{2}}$

以上より、l の最大値は $\underline{(1+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}}$

4 三角形は全部で ${}_8C_3 = 56$ 個つくれる。

問1

正三角形はつくれない。

$\angle A$を頂角とする二等辺三角形は $\triangle ABH$, $\triangle ACG$, $\triangle ADF$ の3個あり、$\angle B \sim \angle H$が頂角となる場合も考えると、

二等辺三角形は $3 \times 8 = \underline{24}$ 個つくれる。

したがって、すべての辺の長さが異なる三角形は $56 - 24 = \underline{32}$ 個つくれる。

問2

$\triangle ABH$と合同な三角形は 8個あるため、

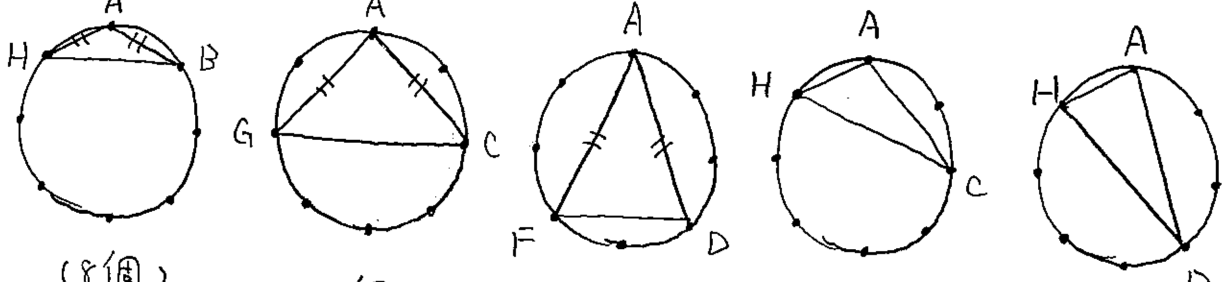
$\triangle ABH$と合同な三角形ができる確率は $\dfrac{8}{56} = \underline{\dfrac{1}{7}}$

辺HAを含み、$\triangle AHC$と合同な三角形は $\triangle AHF$ のみである。

辺AB～辺GHを含む場合も同様に考えると、

$\triangle AHC$と合同な三角形ができる確率は $\dfrac{2 \times 8}{56} = \underline{\dfrac{2}{7}}$

問3



(8個)　(8個)　(8個)　(16個)　(16個)

三角形は上記の $\underline{5}$ 種類つくれる。

問4

三角形を続けて2個つくるとき、

(1) 2個の三角形が合同である確率は、

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \underline{\frac{11}{49}}$$

(2) 1個目が二等辺三角形となる確率は、$\dfrac{3}{7}$

1個目が二等辺三角形かつ2個の三角形が合同となる確率は $\left(\dfrac{1}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 = \dfrac{3}{49}$

したがって求めるべき確率は、$\dfrac{3}{49} \div \dfrac{3}{7} = \underline{\dfrac{1}{7}}$