医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京慈恵会医科大学　数学　試験日 2 月 9 日（水）

1. (ア) A, B の玉の状態を $\begin{pmatrix} A白 & A赤 \\ B白 & B赤 \end{pmatrix}$ と表すことにする。

例えば最初の状態は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と表される。また，白を W，赤を R と表す。

A から赤，B から白を取り出すことを (R, W) のように表すとして，

(W, W) のとき A の R は変化なし。(W, R) または (R, R) のとき A の R は 1 個増える。(R, W) のとき A の R は 1 個減る。

2 回で A の R が 1 個になるのは，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(W,R)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(R,W)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(R,W)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(W,R)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(R,R)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(R,W)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

のときだから

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times(1\times1) + \left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{16}{81} + \frac{9}{81} + \frac{1}{18} = \frac{59}{162} \quad \cdots(答)$$

(イ)

3 回で A の R が 0 個になるのは

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1回 & & 2回 & & 3回 \\ & \xrightarrow{(W,R)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(R,W)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(R,W)} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(R,W)} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(W,R)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(R,W)} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

のときだから

$$\frac{4}{9}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\times(1\times1)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{729} + \frac{9}{729} = \frac{25}{729} \quad \cdots(答)$$

2. (1) $\displaystyle \lim_{x \to -a-0} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x \to -a-0} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$\displaystyle \lim_{x \to -a+0} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x \to -a+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

で一致しないから $x=-a$ で微分可能ではない。

(2) $x > -a$ のとき $\displaystyle f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ より $\displaystyle f'(x) = \frac{1-ax}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$x < -a$ のとき $\displaystyle f(x) = -\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}}$ より $\displaystyle f'(x) = -\frac{ax-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$				0	
$f(x)$	↘	0	↗		↘

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

より $\displaystyle f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$　　$\therefore a = 1$ …(答)

(3) $\displaystyle f(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}$

$\displaystyle V = \pi \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx = \pi \int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$

$\displaystyle = \pi \Big[x + \log(x^2+1) \Big]_{-1}^{0} = \pi(1 - \log 2)$ …(答)

3.(1) 条件より $a_j - a_i = 0, 2$ である.

m を素因数分解したときで考える.

p を3以上の素数, a を自然数として

$m = p^a$ のとき $a > 2$ とすると. 正の約数は $1, p, p^2, \cdots, m$

となり $p^2 - p = 2$ となるから $p = 2, -1$ より不適. $a = 1$ で正の約数は $1, p$ で不適

$a = 2$ のとき $1, p, p^2$ より適する.

q を $p < q$ をみたす素数, b を自然数として.

$m = p^a q^b$ のとき $a \geqq 2$ とすると. $p^a q^b - p \geqq p^2 q - p \geqq 3^2 5 - 3 > 2$ より 不適

$a = 1$ のとき 同様にして $b \geqq 2$ では不適. よって $a = 1, b = 1$

r を $q < r$ をみたす素数として

$m = pqr$ のとき $pr - p \geqq 3 \cdot 7 - 3 > 2$ より不適.

よって素因数を3つもつことはない.

以上より $m = p^2$ か $m = pq$ のときで

$m = p^2$ のとき 正の約数は $1, p, p^2$ で $k = 3$

$m = pq$ のとき 正の約数は $1, p, q, pq$ で $k = 4$ ∎

であり. $m = p^2$ のとき $p = a_2$ $\therefore m = a_2^2$ …(答)

$m = pq$ のとき $q = p + 2$ より $m = p(p+2)$ で $a_2 = p$

よって $m = a_2(a_2 + 2)$ …(答)

(2) $k = 3$ のとき

$(a_2 n + 1)^{a_2} - 1 = {}_{a_2}C_0 (a_2 n)^{a_2} + {}_{a_2}C_1 (a_2 n)^{a_2 - 1} + \cdots + {}_{a_2}C_{a_2 - 1}(a_2 n) + 1 - 1$

$= (a_2 n)^{a_2} + a_2 (a_2 n)^{a_2 - 1} + \cdots + a_2 (a_2 n)$

で $a_2 \geqq 3$ をみたす奇数の素数だから n によらず

すべての項が $a_2^2 = m$ でくくれ. $m \times N$ (Nは自然数)

の形になるから $(a_2 n + 1)^{a_2} - 1$ は m の倍数である. ∎

4. (1) $w = u + vi$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけ

$\dfrac{1}{z} = \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ だから

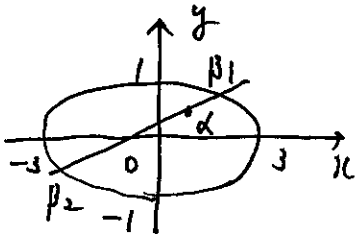
$w = z + \dfrac{2}{z} = 3\cos\theta - 1\sin\theta$

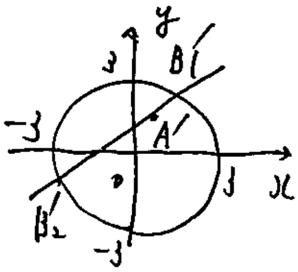
よって $u = 3\cos\theta$, $v = -\sin\theta$

θ を消去して

$\left(\dfrac{u}{3}\right)^2 + v^2 = 1$ ∴ $\dfrac{u^2}{9} + v^2 = 1$ …(答)

(2) w は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 上の点である。





$A(\alpha)$, $B_1(\beta_1)$, $B_2(\beta_2)$ とすると

$|\beta_1 - \alpha||\beta_2 - \alpha| = AB_1 \cdot AB_2$ であり、

楕円を y 軸方向に3倍した円で考えると

A, B_1, B_2 に対応する点をそれぞれ A', B_1', B_2' として $A' = O$ のときは $A'B_1' \cdot A'B_2'$ は9であり、

それ以外のとき $B_1'B_2' = l$, $A'B_1' = t$ とおくと、

$A'B_1' \cdot A'B_2' = t(l - t) = tl - t^2$ となり、

t を固定したとき最大になるのは $l = 6$ (直径) のときであり、

$A'B_1' \times \dfrac{1}{3} = AB_1$, $A'B_2' \times \dfrac{1}{3} = AB_2$ だから、$|\beta_1 - \alpha||\beta_2 - \alpha|$ が最大になるのも直線 l が原点を通るときである。

以上より $|\beta_1 - \alpha||\beta_2 - \alpha|$ が最大になるのは l が原点を通るときである。