東京慈恵会医科大2022年度予想問題

第1問

次の$\boxed{}$にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

正18角形の18個の頂点を反時計回りにA_1, A_2, A_3, $\cdots\cdots$, A_{18}とする．これら18個の頂点から異なる3個を選ぶと三角形が定まる．このようにして定まる三角形の中から2つの三角形を無作為に選ぶとき，これら2つの三角形に共有点が存在する確率は$\boxed{\text{（ア）}}$であり，これら2つの三角形が合同である確率は$\boxed{\text{（イ）}}$である．ただし，選ばれる2つの三角形は同一の三角形であってもよいとし，2つの三角形の共有点としては内部のみならず周上の点も考えるものとする．

第2問

正の整数nに対して，$f(x)=\sin x+nx^4-\dfrac{8}{3}x^3-x$とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間$0<x<\pi$に方程式$f(x)=0$は実数解をただ1つもつことを示せ．必要ならば，$3.1<\pi<3.2$が成立することを利用してよい．

以下では，この実数解をα_nとおく．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$であることを示せ．

(3) 曲線$y=f(x)$の$0\leqq x\leqq\alpha_n$の部分とx軸で囲まれた領域の面積をS_nとするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4S_n=\frac{1}{20}\left(\frac{17}{6}\right)^5$であることを示せ．必要ならば，$x>0$において次の2つの不等式が成立することを利用してよい．

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},$$
$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

第 3 問

p を素数とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) k を $1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす整数とするとき, ${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを示せ.

(2) n を整数とするとき, $(n+1)^p - n^p$ を p で割った余りを求めよ.

(3) p と互いに素な正の整数 a に対して, a^{p-1} を p で割った余りは 1 であることを示せ.

第 4 問

α を $|\alpha| = 1$ かつ $0 < \arg\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす複素数とするとき, 複素数平面上の 4 点 A(1), B(α), C(α^2), D(α^3) について, 次の問いに答えよ. ただし, i は虚数単位とし, $\arg\alpha$ は複素数 α の偏角を表すとし, 複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) と書く.

(1) 2 直線 AB と CD の交点を P(β) とするとき, β を α の式で表せ. ただし, $\overline{\alpha}$ を含まない形で表すこと.

(2) $\triangle$OBP の外接円と単位円 $|z| = 1$ の交点のうち B(α) と異なる方を Q(γ) とするとき, γ を α の式で表せ. ただし, $\overline{\alpha}$ を含まない形で表すこと.

(3) $\triangle$OBP の外接円の中心を R(δ) とするとき, δ を α の式で表せ. ただし, $\overline{\alpha}$ を含まない形で表すこと.

東京慈恵会医科大2022年度予想問題解答

第1問

1つの三角形の選び方は ${}_{18}\mathrm{C}_3 = \dfrac{18\cdot17\cdot16}{3\cdot2\cdot1} = 2^4\cdot3\cdot17$ 通りあるので, 同一の三角形を選んでもよい場合, 選ぶ順序をつけて考えると, 2つの三角形を選ぶ場合の数は, $2^8\cdot3^2\cdot17^2$ 通りである.

選ばれた2つの三角形に共有点が存在する確率を求めるために, 余事象を考えて, 共有点が存在しない確率をまず求める. 共有点を持たない2つの三角形を選ぶには, 6個の頂点を選び, 連続する3個ずつに分けて2つの三角形を作ればよい. 6個の頂点の選び方は ${}_{18}\mathrm{C}_6 = \dfrac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 2^2\cdot3\cdot7\cdot13\cdot17$ 通りあり, これら6点を連続する3個ずつに分ける場合の数が6通りあるから, 選ばれた2つの三角形に共有点が存在しない確率は $\dfrac{2^2\cdot3\cdot7\cdot13\cdot17\times6}{2^8\cdot3^2\cdot17^2} = \dfrac{7\cdot13}{2^5\cdot17} = \dfrac{91}{544}$ となる.
よって, 選ばれた2つの三角形に共有点が存在する確率は $1-\dfrac{91}{544} = \dfrac{453}{544}$ である.

また, 正三角形は全部で6個あり, 正三角形以外の二等辺三角形は1つの頂角に対して両側に等辺をとっていくと7種類の合同でない形状が存在し, そのそれぞれについて頂角の取り方を考えると18個ずつ合同な三角形が存在する. さらに, 二等辺三角形以外の三角形は, 全体の個数から二等辺三角形の個数を除くことで全部で $2^4\cdot3\cdot17-6-7\cdot18 = 2^2\cdot3^2\cdot19$ 個あり, そのうち回転と裏返しで重なる合同なものが $18\times2=36$ 個ずつあるので, 二等辺三角形以外の三角形の互いに合同でない形の種類は $\dfrac{2^2\cdot3^2\cdot19}{36} = 19$ 種類あり, それぞれ36個ずつ合同な三角形が存在する. よって, 選ばれた2つの三角形が合同である確率は

$$\frac{6^2+7\times18^2+19\times36^2}{2^8\cdot3^2\cdot17^2} = \frac{36(1+7\times9+19\times36)}{2^8\cdot3^2\cdot17^2} = \frac{1+63+684}{2^6\cdot17^2} = \frac{11}{272}$$

である.

第 2 問

(1) $f(x)=\sin x+nx^4-\dfrac{8}{3}x^3-x$ を微分していくと

$$f'(x)=\cos x+4nx^3-8x^2-1,\qquad f''(x)=-\sin x+12nx^2-16x,$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x+24nx-16,\qquad f^{(4)}(x)=\sin x+24n$$

となるので, $0<x<\pi$ において $f^{(4)}(x)>0$ となり $f^{(3)}(x)$ は単調増加する．ここで, $f^{(3)}(0)=-17<0$, $f^{(3)}(\pi)=24n\pi-15>24\cdot 1\cdot 3-15=57>0$ であるから, $f^{(3)}(\alpha)=0$ かつ $0<\alpha<\pi$ を満たす α がただ 1 つ存在し, $f''(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f^{(3)}(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

となる．ここで, $f''(0)=0$, $f''(\pi)=12n\pi^2-16\pi=4\pi(3n\pi-4)>4\pi(3\cdot 1\cdot 3-4)$ $=20\pi>0$ であるから, $f''(\beta)=0$ かつ $\alpha<\beta<\pi$ を満たす β がただ 1 つ存在し, $f'(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	β	$\cdots$	(π)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

となる．ここで, $f'(0)=-2<0$, $f'(\pi)=4n\pi^3-8\pi^2-2=4\pi^2(n\pi-2)-2$ $>4\pi^2(1\cdot 3-2)-2=4\pi^2-2>4\cdot 3^2-2=34>0$ であるから, $f'(\gamma)=0$ かつ $\beta<\gamma<\pi$ を満たす γ がただ 1 つ存在し, $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	γ	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

となる．ここで, $f(0)=0$, $f(\pi)=n\pi^4-\dfrac{8}{3}\pi^3-\pi=\pi(n\cdot\pi^3-\dfrac{8}{3}\pi^2-1)$ $>\pi(1\cdot 3.1^3-\dfrac{8}{3}\cdot 3.2^2-1)=\dfrac{4.453}{3}>0$ であるから, $f(\delta)=0$ かつ $\gamma<\delta<\pi$ を満たす δ がただ 1 つ存在する.

以上により, 題意は示された.

(2) $\sin\alpha_n + n{\alpha_n}^4 - \dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 - \alpha_n = 0$ より ${\alpha_n}^4 = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n - \sin\alpha_n\right)$ である.

ここで, $0 < \alpha_n < \pi < 4$ より $0 < \dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n < \dfrac{8}{3}\cdot 4^3 + 4 < 3\cdot 64 + 4 = 196$,

$0 < \sin\alpha_n \leqq 1$ となるので $-1 < \dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n - \sin\alpha_n < 196$ が成立することから

$-\dfrac{1}{n} < {\alpha_n}^4 < \dfrac{196}{n}$ を得る. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{196}{n} = 0$ であるから,

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}{\alpha_n}^4 = 0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ が成立する.

以上により, 題意は示された.

(3) $\sin\alpha_n + n{\alpha_n}^4 - \dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 - \alpha_n = 0$ より $n{\alpha_n}^4 = \dfrac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n - \sin\alpha_n$ である.

ここで, $\alpha_n > 0$ より $\alpha_n - \dfrac{{\alpha_n}^3}{6} < \sin\alpha_n < \alpha_n - \dfrac{{\alpha_n}^3}{6} + \dfrac{{\alpha_n}^5}{120}$ が成立するので

$$\frac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n - \left(\alpha_n - \frac{{\alpha_n}^3}{6} + \frac{{\alpha_n}^5}{120}\right) < n{\alpha_n}^4 < \frac{8}{3}{\alpha_n}^3 + \alpha_n - \left(\alpha_n - \frac{{\alpha_n}^3}{6}\right)$$

すなわち

$$\frac{17}{6} - \frac{{\alpha_n}^2}{120} < n\alpha_n < \frac{17}{6}$$

を得る. このとき, (2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{17}{6} - \frac{{\alpha_n}^2}{120} = \frac{17}{6}$ であるから, はさみうちの原理に

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \frac{17}{6}$ が成立する.

一方で, (1) の証明の過程で得られた増減表より $0 \leqq x \leqq \alpha_n$ において $f(x) \leqq 0$

であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\alpha_n}\{-f(x)\}\ dx = \int_0^{\alpha_n}\left(-\sin x - nx^4 + \frac{8}{3}x^3 + x\right)\ dx \\ &= \left[\cos x - n\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{8}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha_n} \\ &= \cos\alpha_n - \frac{n}{5}{\alpha_n}^5 + \frac{2}{3}{\alpha_n}^4 + \frac{1}{2}{\alpha_n}^2 - 1 \end{aligned}$$

が成立する. ここで, $\alpha_n > 0$ より $1 - \dfrac{{\alpha_n}^2}{2} + \dfrac{{\alpha_n}^4}{24} - \dfrac{{\alpha_n}^6}{720} < \cos\alpha_n < 1 - \dfrac{{\alpha_n}^2}{2} + \dfrac{{\alpha_n}^4}{24}$

が成立するので

$$-\frac{n}{5}{\alpha_n}^5 + \frac{17}{24}{\alpha_n}^4 - \frac{{\alpha_n}^6}{720} < S_n < -\frac{n}{5}{\alpha_n}^5 + \frac{17}{24}{\alpha_n}^4$$

すなわち

$$-\frac{1}{5}(n\alpha_n)^5+\frac{17}{24}(n\alpha_n)^4-\frac{1}{720}(n\alpha_n)^5\cdot\alpha_n<n^4S_n<-\frac{1}{5}(n\alpha_n)^5+\frac{17}{24}(n\alpha_n)^4$$

を得る．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim_{n\to\infty}n\alpha_n=\frac{17}{6}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{5}(n\alpha_n)^5+\frac{17}{24}(n\alpha_n)^4\right\}=-\frac{1}{5}\left(\frac{17}{6}\right)^5+\frac{17}{24}\left(\frac{17}{6}\right)^4=\frac{1}{20}\left(\frac{17}{6}\right)^5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{5}(n\alpha_n)^5+\frac{17}{24}(n\alpha_n)^4-\frac{1}{720}(n\alpha_n)^5\cdot\alpha_n\right\}=\frac{1}{20}\left(\frac{17}{6}\right)^5$$

となるので，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4S_n=\frac{1}{20}\left(\frac{17}{6}\right)^5$ が成立する．

第 3 問

(1) $1\leqq k\leqq p$ を満たす整数 k に対して

$$k_p\mathrm{C}_k=k\cdot\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p!}{(k-1)!(p-k)!}$$

$$p_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}=p\cdot\frac{(p-1)!}{(k-1)!\{(p-1)-(k-1)\}!}=\frac{p!}{(k-1)!(p-k)!}$$

となるので，$k_p\mathrm{C}_k=p_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が成立する．

このとき，右辺の $p_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$ が p で割り切れるので，左辺の $k_p\mathrm{C}_k$ も p で割り切れる．ここで，p は素数より，$1\leqq k\leqq p-1$ を満たす整数 k は p と互いに素である．よって，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れなければならない．

(別解) ${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}=\dfrac{p\times(p-1)!}{k!(p-k)!}$ より $k!(p-k)!\,{}_p\mathrm{C}_k=p\times(p-1)!$ となる．ここで，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき，$k!(p-k)!$ に含まれる素因数はすべて 1 以上 $p-1$ 以下であるから，p と互いに素である．よって，${}_p\mathrm{C}_k$ が p で割り切れなければならない．

(2) (1) の結果より, $1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす整数 k に対して, ${}_p\mathrm{C}_k = p\,m_k$ を満たす正の整数 m_k が存在する. このとき, 二項定理より

$$\begin{aligned}(n+1)^p - n^p &= \sum_{k=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_k n^k - n^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k n^k + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} p\,m_k n^k + 1 = p\sum_{k=1}^{p-1} m_k n^k + 1\end{aligned}$$

となるので, $(n+1)^p - n^p$ を p で割った余りは 1 である.

(3) (2) の結果より, 整数 n に対して, $(n+1)^p - n^p = p\,u_n + 1$ を満たす整数 u_n が存在する. このとき, この式の $n=1$ から $n=a-1$ までの和をとると

$$\sum_{n=1}^{a-1}\left\{(n+1)^p - n^p\right\} = \sum_{n=1}^{a-1}(p\,u_n + 1)$$

$$\iff \quad a^p - 1 = p\sum_{n=1}^{a-1} u_n + a - 1$$

$$\therefore \quad a(a^{p-1}-1) = p\sum_{n=1}^{a-1} u_n$$

ここで, この等式の右辺は p で割り切れるので, 左辺の $a(a^{p-1}-1)$ も p で割り切れることになるが, a は p と互いに素なので, $a^{p-1}-1$ が p で割り切れなければならない. よって, a^{p-1} を p で割った余りは 1 である.

第 4 問

(1) $|\alpha| = 1$ であるから $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$ となるので $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ $\cdots\cdots$ ① が成立する.

さらに, $0 < \arg\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ により, $\alpha \neq 0$, $\alpha - 1 \neq 0$, $\alpha + 1 \neq 0$, $\alpha^2 + 1 \neq 0$ が成立することに注意しておく.

ここで, A(1), B(α), P(β) は一直線上にあるので, 共線条件より

$$\frac{\beta - 1}{\alpha - 1} \text{ は実数} \qquad \text{すなわち} \qquad \overline{\left(\frac{\beta - 1}{\alpha - 1}\right)} = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$$

が成立するから, ①より

$$\left(\overline{\beta} - 1\right)(\alpha - 1) = \left(\overline{\alpha} - 1\right)(\beta - 1)$$

$$\left(\overline{\beta} - 1\right)(\alpha - 1) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(\beta - 1)$$

$$\left(\overline{\beta} - 1\right)(\alpha - 1) = -\frac{\alpha - 1}{\alpha}(\beta - 1)$$

両辺を $\alpha - 1\,(\neq 0)$ で割って変形すると

$$\overline{\beta} = -\frac{1}{\alpha}\beta + \frac{1}{\alpha} + 1 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

また, C(α^2), D(α^3), P(β) は一直線上にあるので, 共線条件より

$$\frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^3 - \alpha^2} \text{ は実数} \qquad \text{すなわち} \qquad \overline{\left(\frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^3 - \alpha^2}\right)} = \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^3 - \alpha^2}$$

が成立するから, ①より

$$\left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}^{\,2}\right)(\alpha^3 - \alpha^2) = \left(\overline{\alpha}^{\,3} - \overline{\alpha}^{\,2}\right)(\beta - \alpha^2)$$

$$\left(\overline{\beta} - \frac{1}{\alpha^2}\right)(\alpha^3 - \alpha^2) = \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2}\right)(\beta - \alpha^2)$$

$$\left(\overline{\beta} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\alpha^2(\alpha - 1) = -\frac{\alpha - 1}{\alpha^3}(\beta - \alpha^2)$$

両辺を $\alpha^2(\alpha - 1)\,(\neq 0)$ で割って変形すると

$$\overline{\beta} = -\frac{1}{\alpha^5}\beta + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

よって, ②③により

$$-\frac{1}{\alpha}\beta + \frac{1}{\alpha} + 1 = -\frac{1}{\alpha^5}\beta + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2}$$

両辺に α^5 を掛けて変形すると

$$(\alpha^4 - 1)\beta = \alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2$$

$$(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)\,\beta = \alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha+1)$$

両辺を $(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)\,(\neq 0)$ で割って

$$\beta = \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+1} \quad \cdots\cdots \quad ④$$

(2) $|\gamma|=1$ より $\gamma\overline{\gamma} = |\gamma|^2 = 1$ となるので $\overline{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma} \quad \cdots\cdots \quad ⑤$ が成立する.

また, (1) の結果と①より

$$\overline{\beta} = \overline{\left(\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+1}\right)} = \frac{\overline{\alpha}^{\,2}(\overline{\alpha}+1)}{\overline{\alpha}^{\,2}+1} = \frac{\dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)}{\dfrac{1}{\alpha^2}+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha^2+1)}$$

すなわち $\overline{\beta} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(\alpha^2+1)} \quad \cdots\cdots \quad ⑥$ が成立する.

ここで, O(0), B(α), P(β), Q(γ) は同一円周上にあるので, 共円条件を考える.

図で位置関係を考えると, 円周角の定理により

$$\angle\mathrm{OQB} = \angle\mathrm{OPB} \qquad \text{すなわち} \qquad \arg\left(\frac{\alpha-\gamma}{0-\gamma}\right) = \arg\left(\frac{\alpha-\beta}{0-\beta}\right)$$

$$\therefore \quad \arg\left(\frac{\dfrac{\alpha-\gamma}{0-\gamma}}{\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}}\right) = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

が成立する.

よって, $\dfrac{\dfrac{\alpha-\gamma}{0-\gamma}}{\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}} = \dfrac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\beta-\alpha)}$ は正の実数であるから

$$\overline{\left(\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\beta-\alpha)}\right)} = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\beta-\alpha)}$$

が成立するので

$$\overline{\beta}\left(\overline{\gamma}-\overline{\alpha}\right)\gamma(\beta-\alpha) = \overline{\gamma}\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)\beta(\gamma-\alpha)$$

ここで, ①④⑤⑥ より

$$\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha^2+1)}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)\gamma\left(\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+1}-\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha^2+1)}-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha^2+1}(\gamma-\alpha)$$

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha^2+1)^2}=\frac{\alpha^2(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha^2+1)^2}$$

よって, $(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-\gamma)\neq 0$ であることに注意して

$$\gamma=\alpha^3$$

(3) (2) の結果より $\mathrm{Q}=\mathrm{D}$ であり, $\triangle\mathrm{OBP}$ の外接円の周上に点 D があることになり, $\triangle\mathrm{OBP}$ の外接円の中心を求めるには, それと一致する $\triangle\mathrm{OBD}$ の外接円の中心を求めればよい.

ここで, 線分 OB, OD の中点をそれぞれ M, N とすると $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\dfrac{\alpha^3}{2}\right)$ であり, 外心の性質より $\mathrm{MR}\perp\mathrm{OB}$, $\mathrm{NR}\perp\mathrm{OD}$ が成立する. よって, 垂直条件より $\dfrac{\delta-\frac{\alpha}{2}}{\alpha-0}$, $\dfrac{\delta-\frac{\alpha^3}{2}}{\alpha^3-0}$ はともに純虚数となるので

$$\overline{\left(\frac{\delta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)}=-\left(\frac{\delta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\qquad \text{かつ}\qquad \overline{\left(\frac{\delta}{\alpha^3}-\frac{1}{2}\right)}=-\left(\frac{\delta}{\alpha^3}-\frac{1}{2}\right)$$

が成立するので, ①を利用してそれぞれを変形していく.

$$\overline{\left(\frac{\delta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)}=-\left(\frac{\delta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\iff\frac{\overline{\delta}}{\overline{\alpha}}-\frac{1}{2}=-\frac{\delta}{\alpha}+\frac{1}{2}$$

$$\iff\alpha\overline{\delta}=-\frac{\delta}{\alpha}+1\qquad\therefore\quad\overline{\delta}=-\frac{\delta}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}$$

$$\overline{\left(\frac{\delta}{\alpha^3}-\frac{1}{2}\right)}=-\left(\frac{\delta}{\alpha^3}-\frac{1}{2}\right)\iff\frac{\overline{\delta}}{\overline{\alpha}^{\,3}}-\frac{1}{2}=-\frac{\delta}{\alpha^3}+\frac{1}{2}$$

$$\iff\alpha^3\overline{\delta}=-\frac{\delta}{\alpha^3}+1\qquad\therefore\quad\overline{\delta}=-\frac{\delta}{\alpha^6}+\frac{1}{\alpha^3}$$

これより, $-\dfrac{\delta}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{\delta}{\alpha^6}+\dfrac{1}{\alpha^3}$ を得るので, 両辺に α^6 を掛けると

$$-\alpha^4\delta+\alpha^5=-\delta+\alpha^3\iff(\alpha^4-1)\delta=\alpha^2(\alpha^2-\alpha)$$

$$\therefore\quad\delta=\frac{\alpha^3}{\alpha^2+1}$$

● コメント

1 次試験は全科目で 400 点満点で、そのうち数学が 100 点を占める。試験時間は 90 分で、2013 年以降は、第 1 問が小問 2 題で構成され 3 ～ 5 か所の空欄に結果の数値のみ答える形式で小問の (1) には必ず確率の問題が出題、第 2 問、第 3 問、第 4 問が記述式の大問（過去には空所補充を部分的に含むことがあったが 2017 年以降は完全に記述式となっている）という 4 問構成となっていたが、2020 年、2021 年と 2 年続けて第 1 問が小問構成ではない確率のみの出題となった。この形式が今年度以降も継続するかどうかは不明だが、第 1 問の確率の問題は一定の難度ではあるものの確実に得点しておきたいところである。第 2 問には数学 Ⅲ の本格的な微積分の問題が出題される。グラフなどの図示を求められるケースもある。第 3 問には近年は整数に関連した出題が続き、高い論証力が要求される本格的な証明問題の出題もあるので、しっかり対策しておく必要がある。第 4 問には近年はベクトル、複素数平面が交互に出題されていたが、2021 年度には図形的な無限等比級数の問題が出題された。ここは、出題範囲を決めつけずに幅広い分野に対応できるように対策しておくべきだろう。例年、重量級の問題が含まれている一方で、1 題は比較的方針がたてやすい問題であることが多いので、問題の難易度を見極めて得点するべき部分を確実に正解していくことが大切である。証明問題では論証のポイントをしっかり押さえつつ簡潔にまとまった記述が求められる。合格レヴェルに達するには高度な思考力、粘り強い計算力の錬成が必要となる。