女子医コメント

《コメント》　試験時間は60分で,大問4問の出題であり,4問とも大問である.2019年は第1問は和を含む漸化式の一般項を求めることと数列の和の計算,第2問は直交する2直線とx軸で囲まれる三角形の面積の極限を求める問題,第3問は5個の異なる数字から4桁の整数を作り,4の倍数,6の倍数,12の倍数の個数を求める問題,第4問は対数関数が極値を持つ条件を求める問題であった.例年より計算が面倒であるが,典型的な問題であり,難易度は標準で,4問中2問が数IIIの範囲の問題であった.
2020年は第1問が三角関数の面積と極限,第2問が直方体の体積の最大値で,3次関数の最大に帰着させる問題である.第3問は第k項がk　と等比数列の積で表される数列の和で,第4問は不等式を満たす自然数nを求める問題で,数学的帰納法を利用する.どれも頻出タイプであるが,苦労するポイントを持っている問題である.
さらに,2021年は第1問は小問3問の構成で,(1)は無理数の整数部分,小数部分を求める問題,(2)は無理関数の極限値,(3)は$\tan\dfrac{\theta}{2}$で$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$を表す問題,第2問は三角比の平面図形への応用で,余弦定理で線分の長さを求めて,その最大値を2次関数に帰着させて求める問題,第3問は3つのサイコロを投げたときにどの2つの目の和も一定になる確率を求める問題で,(3)では確率の加法定理を用いる設問になっている.第4問は条件がx, yの対数方程式で与えられたときのxyのとりうる値の範囲を求める問題で,$\log\ x = X$, $\log\ y = Y$とおいて,X, Yの式として2次方程式の話にもっていく問題である.この年は全体的に例年より易しめで,数IIIも出題されなかったが,2022年は2020年以前のレベルと出題内容に戻ると考えていたほうが良い.

予想問題$\boxed{1}$では,実数$\dfrac{1}{x}$の整数部分をnとして,小数部分が$\dfrac{x}{4}$であることから,nとxの関係式を作り,条件からnの範囲を絞る.
予想問題$\boxed{2}$は,確率漸化式の問題であり,$n-1$とnの関係から漸化式を導く.
予想問題$\boxed{3}$では,楕円の媒介変数表示を用いて,三角関数の最大の問題に帰着させる.
予想問題$\boxed{4}$では,定数区間の定積分は定数であることを用いて,置き換えをして定積分の計算に持ち込む定型問題である.

東京女子医科大学予想問題

$\boxed{1}$ 正の実数xでその逆数の小数部分が$\frac{x}{4}$に等しく，しかも，$0 < \frac{1}{x} \leqq 3$を満たすものをすべて求めよ．ただし，正の実数aを，0または自然数であるnと$0 \leqq r < 1$を満たすrによって$a = n + r$と表したとき，rをaの小数部分という．

$\boxed{2}$ さいころをn回続けて投げるとき，k回目に出る目の数をX_kとし，$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$とする．$Y_n$が7で割り切れる確率を$p_n$とする．

(1) p_nをp_{n-1}を用いて表せ．

(2) p_nを求めよ．

$\boxed{3}$ 楕円$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$をCとし，楕円C上の点Pから直線$x - 2y - 3 = 0$に下ろした垂線の足をHとする．点Pが楕円C上を動くとき，線分PHの長さの最大値を求めよ．

$\boxed{4}$ 関数$f(x)$は，次の等式を満たしているとする．

$$f(x) = 1 + \int_0^1 xte^{x+t} f(t)dt$$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 定積分$\int_0^1 te^t dt$, $\int_0^1 t^2 e^{2t} dt$を，それぞれ求めよ．

(2) 関数$f(x)$を求めよ．

(3) 関数$f(x)$の増減と極値，曲線$y = f(x)$の凹凸と変曲点を調べ，その概形をえがけ．
ただし，$e > 2.7$, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$であることを用いてよい．

東京女子医科大学予想問題・解答

1 正の実数 x について, $\frac{1}{x}$ の整数部分を n, 小数部分を $\frac{x}{4}$ とすると,

$$\frac{1}{x}=n+\frac{x}{4},\ n\leqq\frac{1}{x}<n+1\cdots\cdots①$$

$0<\frac{1}{x}\leqq 3$ であるが, 小数部分 $\frac{x}{4}$ が正なので, $\frac{1}{x}\neq 3$ であり, $n=0,\ 1,\ 2$ のいずれかである.

( ) $n=0$ のとき, ① より,

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{4},\ 0\leqq\frac{1}{x}<1$$

だから,

$$x=2$$

( ) $n=1$ のとき, ① より,

$$\frac{1}{x}=1+\frac{x}{4},\ 1\leqq\frac{1}{x}<2$$
$$\iff x^2+4x-4=0,\ \frac{1}{2}<x\leqq 1$$
$$\iff x=-2+2\sqrt{2}$$

( ) $n=2$ のとき, ① より,

$$\frac{1}{x}=2+\frac{x}{4},\ 2\leqq\frac{1}{x}<3$$
$$\iff x^2+8x-4=0,\ \frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{2}$$
$$\iff x=-4+2\sqrt{5}$$

以上より,

$$\boldsymbol{x=2,\ -2+2\sqrt{2},\ -4+2\sqrt{5}}\cdots(答)$$

2 (1) Y_{n-1} を 7 で割ったときの余りが 0 のときは n 回目に何が出ても $Y_n=Y_{n-1}+X_n$ が 7 で割り切れることはない. Y_{n-1} を 7 で割った余りが 1 のときは n 回目に 6 が, 余りが 2 のときは n 回目に 5 が, 余りが 3 のときは 4 が, 余りが 4 のときは 3 が, 余りが 5 のときは 2 が, 余りが 6 のときは 1 が出るときに Y_n が 7 で割りきれる. すなわち, Y_n が 7 で割り切れるのは, Y_{n-1} が 7 で割り切れず (その確率は $1-p_{n-1}$), n 回目に $7-$(Y_{n-1} を 7 で割った余り) の目が出るときで,

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{6}(1-p_{n-1})}\cdots(答)$$

(2) (1) より,

$$p_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_{n-1} - \frac{1}{7}\right)$$
$$\Longleftrightarrow p_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{7}\right)$$

$p_1 = 0$ とから,

$$p_n = \frac{1}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} \cdots (答)$$

$\boxed{3}$ $\mathrm{P}(2\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと,

$$\mathrm{PH} = \frac{|2\cos\theta - 2\sin\theta - 3|}{\sqrt{1+4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right|$$

これが最大になるのは $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ のときで, 最大値は,

$$\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}+3\sqrt{5}}{5} \cdots (答)$$

$\boxed{4}$ (1)

$$\int_0^1 te^t dt = \left[te^t - e^t\right]_0^1 = 1 \cdots (答)$$
$$\int_0^1 t^2e^{2t}dt = \left[t^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2t} - 2t \cdot \frac{1}{4}e^{2t} + 2 \cdot \frac{1}{8}e^{2t}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}(e^2 - 1) \cdots (答)$$

(2) $f(x) = 1 + xe^x \int_0^1 te^t f(t)dt$ であるから,

$\int_0^1 te^t f(t)dt = A$ とおけて, $f(x) = 1 + Axe^x$ である.
よって

$$A = \int_0^1 te^t(1 + Ate^t)dt$$
$$= \int_0^1 te^t dt + A\int_0^1 t^2e^{2t}dt$$
$$= 1 + \frac{A}{4}(e^2 - 1)$$

したがって

$$A=1+\frac{A}{4}(e^2-1)\iff A=\frac{4}{5-e^2}$$

よって

$$f(x)=1+\frac{4}{5-e^2}xe^x\cdots(答)$$

(3)

$$f'(x)=\frac{4}{5-e^2}e^x(1+x)$$
$$f''(x)=\frac{4}{5-e^2}e^x(2+x)$$

であるから, $f'(x)=0$ より $x=-1$, $f''(x)=0$ より $x=-2$.
したがって増減, 凹凸は下のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	$1-\frac{8}{e^2(5-e^2)}$	↗	$1-\frac{4}{e(5-e^2)}$	↘

$x=-1$ のとき,

$$極大値1-\frac{4}{e(5-e^2)}\cdots(答)$$

極小値はない､変曲点は

$$\left(-2,\ 1-\frac{8}{e^2(5-e^2)}\right)\cdots(答)$$

また, $e>2.7$ より $e^2>7.29$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$$

であり

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{4}{5-e^2}(-t)e^{-t}\right)=1$$

よって, グラフの概形は下図のようになる.

4