順天堂医学部コメント

《コメント》 試験時間は 分で 大問 問の出題であり 第 問は 年までは小問 問 年から 年までは小問 問 年は小問 問で構成されている 残りの 問は大問であり 問はマークセンス方式 もう 問は記述式の出題である 年は第 問はド・モアブルの定理と複素数平面上の正三角形 数字を並べる順列と必要条件・十分条件 媒介変数表示された曲線と面積 第 問は漸化式と極限 第 問はユークリッドの互除法に関する証明問題であった 年は第 問は平面ベクトルの図形への応用 三角比の空間図形への応用 極方程式と面積 曲線の長さ 第 問は極座標と体積 第 問ははさみうちの原理と曲線にひける接線の本数を求める問題であった どれも計算量が多かったり 思考力を要する問題だったりするが 特に大問の第 問と第 問は難問で時間内ですべてをこなすのが大変な問題となっている

年は第 問は が複素数と図形 が 次関数と面積 がデータの分析 が領域における最大・最小 第 問は三角関数の図形への応用 第 問は大学の数論のp進距離という理論で 最後まで解くのは難しい 第 問は比較的解きやすいので 確実に得点にする必要があり 第 問も誘導が丁寧なのである程度解けるであろう

予想問題□では は 次方程式の3つの解が直角三角形を作るための係数を求める問題であり はカードを使ったゲームの確率 は極方程式と面積に関する問題で 極座標を用いた面積の公式が使えると早い

予想問題□はガウス記号を用いた問題で 場合分けを丁寧に行っていく必要がある

予想問題□は不定方程式に整数解の組が存在するかどうかに関する証明問題である

順天堂大予想問題

$\boxed{1}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ. ただし, 同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合には同一の値がはいる.

(1) (i) 三角関数の加法定理により,

$$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

$$= \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{エ}}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

がわかる.

(ii) 係数が実数である3次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \cdots (1)$$

が3つの解 α, β, γ をもち, $\gamma = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ であるとする. 因数定理から (1) は適当な実数 p, q に対して

$$(x-\gamma)^2(x^2 + px + q) = 0$$

と書ける. 複素数平面上で, α の絶対値は1, 偏角 $\arg\alpha$ は $0 \leqq \arg\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲にあり, 3点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ は直角三角形であるとする. このとき

$\arg\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ であり,

$$a = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(-\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

$$b = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

$$c = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(-\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

であることがわかる.

(2) (i) 1から10までの数字をひとつずつ書いた10枚のカードがある．これらのカードをよく切り，まずA君が2枚引き，その後B君が3枚引いて，互いに持っているカードをすべて見せ合い，勝敗を争うゲームを行う．2人が持っているカードのうち一番大きな数字の書かれたカードを持っている方を勝ちとしたとき，A君の勝つ確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(ii) (i)のゲームで規則を変更する．まずA君が2枚引き，そのカードをすべて見せた後2枚のカードを戻し，10枚のカードをあらためてよく切った後B君が3枚引き，そのカードをすべて見せる．A君とB君の引いたカードのうち一番大きな数字の書かれたカードを引いた方を勝ちとする．ただし，2人とも同じ一番大きな数字を引いたときは引き分けとする．

このときA君の勝つ確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカキ}}$ であり，引き分けになる確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシ}}$ である．

(3)

$$x=\sqrt{\cos 2t}\cos t,\ y=\sqrt{\cos 2t}\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

と媒介変数 t で表される曲線を C とする．曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ における y の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ であり，そのときの x の値は

$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である．また，曲線 C で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である．

$\boxed{2}$ 実数 x を越えない最大の整数を $[x]$ とし, $\{x\} = x - [x]$ とする.

(1) $\left[\dfrac{7}{3}\right] = \boxed{\text{ア}}$, $[\sqrt{1357}] = \boxed{\text{イウ}}$, $[2\log_{10}123] = \boxed{\text{エ}}$ である.

(2) $0 \leqq \{x\} < \dfrac{1}{3}$ ならば $[3x] = \boxed{\text{オ}}\,x - \boxed{\text{カ}}\,\{x\}$, $\dfrac{1}{3} \leqq \{x\} < \dfrac{2}{3}$ ならば $[3x] = \boxed{\text{キ}}\,x - \boxed{\text{ク}}\,\{x\} + \boxed{\text{ケ}}$, $\dfrac{2}{3} \leqq \{x\} < 1$ ならば $[3x] = \boxed{\text{コ}}\,x - \boxed{\text{サ}}\,\{x\} + \boxed{\text{シ}}$ である.

(3) $\{x\} = -8 + \sqrt{71}$ のとき方程式 $[3x]^2 + 6[x] - 61 = 0$ を満たす x の値は $\boxed{\text{スセ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}$ である.

(4) $y = [3x]$ のグラフと $y = [3x]^2$ のグラフ, および 2 直線 $x = \dfrac{k}{3}$, $x = \dfrac{k+1}{3}$ で囲まれる部分の面積を S_k $(k = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$ とするとき $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} S_k = \dfrac{\boxed{\text{チツテト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である.

$\boxed{3}$ xy 平面上の点で x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点という. a, k は整数で $a \geqq 2$ とし, 直線 $L : ax + (a^2+1)y = k$ を考える.

(1) 直線 L 上の格子点を 1 つ求めよ.

(2) $k = a(a^2+1)$ のとき, $x > 0$, $y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ.

(3) $k > a(a^2+1)$ ならば, $x > 0$, $y > 0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ.

順天堂予想問題・解答

$\boxed{1}$ (1) (i) 加法定理を用いて,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(ii) 実数係数の 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

の 3 解を α, β, γ とし,

$$\gamma=\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

とすると, 適当な実数 p, q を用いて, (a) は,

$$(x-\gamma)(x^2+px+q)=0$$

となり, α, β は, $x^2+px+q=0$ の 2 解で,

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

といえる. よって, α, β は,

(ア) α, β はともに実数

(イ) α, β は互いに共役な虚数

のいずれかである.
さらに, 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ が三角形をなすことから, (ア) はありえず, (イ) であることが必要である. このとき, $A(\alpha)$ と $B(\beta)$ は実軸に関して対称であり, $C(\gamma)$ は実軸上にあるから, $\triangle ABC$ が直角三角形となるとき, $\triangle ABC$ は,

$$AC = BC \text{ の直角二等辺三角形}$$

となる. さらに, α の絶対値が 1, 偏角 α が $0 \leqq \arg\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおける. このとき, 辺 AB の中点を M とすると, $AM = CM$ より,

$$(\alpha\text{の実部}) - \gamma = (\alpha\text{の虚部})$$
$$\cos\theta - \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\theta$$

が成り立つ. これより,

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$$
$$\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)$$

となるので, n, n_1, n_2 を整数として,

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2n_1\pi,\ -\frac{5\pi}{6} + 2n_2\pi$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より,

$$\theta = \frac{\pi}{3} \iff \arg\theta = \mathbf{\frac{1}{3}}\pi \cdots (\text{答})$$

このとき,

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta = \overline{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

であるから,(a) の解と係数の関係より,

$$a=-(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{3})\cdots(答)$$
$$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\cdots(答)$$
$$c=-\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})\cdots(答)$$

(2) (i) A 君が 2 枚, B 君が 3 枚の計 5 枚のカードを順番に 1 枚ずつ引いていくとき, 何番目に 1 番大きな数字の書かれたカードが出るかは 5 通りあり, そのどれもが同様に確からしい. その中で 1 番大きな数字の書かれたカードを A 君が持つのは, そのカードが 1 番目か 2 番目に出る場合で 2 通りあるから, A 君が勝つ確率は,

$$\frac{2}{5}\cdots(答)$$

(ii) A 君と B 君のカードの引き方は全部で,

$${}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_3=45\cdot120=5400\,(通り)$$

あり, そのどれもが同様に確からしい. A 君が勝つときを考える. A 君の引くカードに書かれた数字の最大値が k のとき, A 君の残りの 1 枚のカードは $k-1$ 以下のカードで $k-1$ 通りあり, B 君の引くカードは $k-1$ 以下のカード 3 枚で ${}_{k-1}C_3$ 通りある. ただし, $k=4,\ 5,\ \cdots,\ 10$ である. よって, A 君が勝つ場合の数は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=4}^{10}(k-1)\,{}_{k-1}C_3\\
&=3\cdot{}_3C_3+4\cdot{}_4C_3+5\cdot{}_5C_3+6\cdot{}_6C_3\\
&\qquad+7\cdot{}_7C_3+8\cdot{}_8C_3+9\cdot{}_9C_3\\
&=3\cdot1+4\cdot4+5\cdot10+6\cdot20+7\cdot35+8\cdot56+9\cdot84\\
&=3+16+50+120+245+448+756\\
&=1638\,(通り)
\end{aligned}$$

ゆえに, A 君が勝つ確率は,

$$\frac{1638}{5400}=\frac{91}{300}\cdots(答)$$

引き分けとなる場合を考える.A君とB君の引くカードに書かれた数字の最大値がともにkのとき,A君の残りの1枚のカードとB君の残り2枚のカードはともに$k-1$以下のカードで$(k-1)_{k-1}\mathrm{C}_2$通りある.ただし,$k=3,4,\cdots,10$である.よって,引き分けとなる場合の数は,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{10}(k-1)\,{}_{k-1}\mathrm{C}_2\\
&=2\cdot{}_2\mathrm{C}_2+3\cdot{}_3\mathrm{C}_2+4\cdot{}_4\mathrm{C}_2+5\cdot{}_5\mathrm{C}_2+6\cdot{}_6\mathrm{C}_2\\
&\quad+7\cdot{}_7\mathrm{C}_2+8\cdot{}_8\mathrm{C}_2+9\cdot{}_9\mathrm{C}_2\\
&=2\cdot1+3\cdot3+4\cdot6+5\cdot10+6\cdot15\\
&\quad+7\cdot21+8\cdot28+9\cdot36\\
&=2+9+24+50+90+147+224+324\\
&=870\ (\text{通り})
\end{aligned}
$$

ゆえに,引き分けとなる確率は,

$$\frac{870}{5400}=\boldsymbol{\frac{29}{180}}\cdots(\text{答})$$

(3)　yの最大値を求めるには,$y\geqq0$である$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}$のときを考えれば十分である.そのとき,

$$
\begin{aligned}
y^2&=\cos2t\sin^2t=(1-2\sin^2t)\sin^2t\\
&=-2\left(\sin^2t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2}{4^2}
\end{aligned}
$$

だから,$\sin t=\dfrac{1}{2}$すなわち$t=\dfrac{\pi}{6}$のときyは最大となり,最大値は,

$$\sqrt{\frac{2}{4^2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}\cdots(\text{答})$$

そのとき,

$$x=\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}\cdots(\text{答})$$

また,曲線C上の点$(\sqrt{\cos2t}\cos t,\ \sqrt{\cos2t}\sin t)$の極座標を$(r,\theta)$とおくと,

$$r=\sqrt{\cos2t},\ \theta=t$$

となる.

よって, 求める面積 S は,

$$S=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ (1) $2 < \dfrac{7}{3} < 3$ より,

$$\left[\frac{7}{3}\right] = \mathbf{2} \cdots (答)$$

$36 = \sqrt{1296} < \sqrt{1357} < \sqrt{1369} = 37$ より,

$$[\sqrt{1357}] = \mathbf{36} \cdots (答)$$

$4 = 2\log 100 < 2\log 123 < 2\log 10\sqrt{10} = 5$ より,

$$[2\log 123] = \mathbf{4} \cdots (答)$$

(2) $l = 0, 1, 2$ として, $\{x\} = x - [x]$ より,

$$\frac{l}{3} \leqq \{x\} < \frac{l+1}{3} \iff [x] + \frac{l}{3} \leqq x < [x] + \frac{l+1}{3}$$
$$\iff 3[x] + l \leqq 3x < 3[x] + l + 1$$
$$\iff [3x] = 3[x] + l = 3x - 3\{x\} + l$$

よって, $0 \leqq \{x\} < \dfrac{1}{3}$ のとき, $l = 0$ だから,

$$[3x] = \mathbf{3x - 3\{x\}} \cdots (答)$$

$\dfrac{1}{3} \leqq \{x\} < \dfrac{2}{3}$ のとき, $l = 1$ だから,

$$[3x] = \mathbf{3x - 3\{x\} + 1} \cdots (答)$$

$\dfrac{2}{3} \leqq \{x\} < 1$ のとき, $l = 2$ だから,

$$[3x] = \mathbf{3x - 3\{x\} + 2} \cdots (答)$$

(3) $\dfrac{1}{3} < \{x\} = -8 + \sqrt{71} < \dfrac{2}{3}$ から, (2) の結果を用いて,

$$[3x] = 3[x] + 1$$

これを与えられた方程式に代入すると,

$$3(3[x] + 10)([x] - 2) = 0 \iff [x] = 2$$

よって,

$$x = [x] + \{x\} = \mathbf{-6 + \sqrt{71}} \cdots (答)$$

(4) $\dfrac{k}{3} \leqq x < \dfrac{k+1}{3}$ のとき, $[3x] = k$, $[3x]^2 = k^2$ だから,

$$S_k = \left(\frac{k+1}{3} - \frac{k}{3}\right)(k^2 - k) = \frac{k^2 - k}{3}$$

よって,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{20} S_k &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{19} k(k+1) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 19\cdot 20\cdot 21 \\ &= \frac{2660}{3} \cdots (答)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (1) Lを変形して

$$ax + a^2y + y = k$$
$$a(x + ay) + y = k$$

$x + ay = 0,\ y = k$ とおくと $x = -ak$
よって,格子点の1つは

$$(-ak,\ k) \cdots (答)$$

(2)

$$ax + (a^2 + 1)y = k \cdots\cdots (a)$$
$$a \cdot (-ak) + (a^2 + 1) \cdot k = k \cdots\cdots (b)$$

(a) − (b) より,

$$a(x + ak) + (a^2 + 1)(y - k) = 0$$
$$a(x + ak) = -(a^2 + 1)(y - k)$$

左辺は a の倍数であるから右辺も a の倍数. a と $a^2 + 1$ は互いに素であるから $y - k$ が a の倍数で $y - k = am$ (m は整数) とおける.

$$a(x + ak) = -(a^2 + 1) \cdot am$$
$$x + ak = -(a^2 + 1)m$$
$$x = -ak - (a^2 + 1)m,\ y = k + am$$

$$x > 0,\ y > 0 \iff -ak - (a^2 + 1)m > 0,\ k + am > 0$$
$$\iff -\frac{k}{a} < m < -\frac{ak}{a^2 + 1} \cdots\cdots (c)$$

$k = a(a^2 + 1)$ のとき,

$$-(a^2 + 1) < m < -a^2$$
$$\iff a^2 < -m < a^2 + 1$$

これを満たす整数 m は存在しないから $x > 0,\ y > 0$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ は存在しない. ∎

(3) $k > a(a^2 + 1)$ のとき (c) の区間の幅

$$-\frac{ak}{a^2 + 1} - \left(-\frac{k}{a}\right) = \frac{k}{a(a^2 + 1)} > 1$$

であるから, (c) を満たす整数 m が少なくとも1つ存在し, $x > 0$, $y > 0$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ は存在する. ∎