慶應大学医学部2022年度予想問題

第1問

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい.

(1) 多項式 $f(x)$ に対して, $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $4x+1$ であり, $(x-2)f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $5x-2$ であるとする. このとき, $f(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割った余りは $\boxed{(あ)}$ であり, 条件を満たす $f(x)$ のうち最も次数が低い多項式は $f(x)=\boxed{(い)}$ である.

(2) 関数 $f(x)=2\sin 10x-5\sin 4x$ が極値を取るような x の値のうち $x>0$ に含まれるものを小さいほうから順に $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ $(a_1<a_2<a_3<\cdots)$ とする. このとき, $a_6=\boxed{(う)}$, $f(a_{99})=\boxed{(え)}$ であり, $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{4\pi}{3}$ の範囲に含まれる $f(x)$ の極値の総和は $\boxed{(お)}$ である.

(3) 方程式 $x^4+x^2y^2+y^4=39p$ を満たす整数 $x,\ y$ と素数 p の組で $0<x\leqq y$ を満たすものは全部で $\boxed{(か)}$ 組あり, そのうち p が最大である組は $(x,\ y,\ p)=(\boxed{(き)},\ \boxed{(く)},\ \boxed{(け)})$ である.

第 2 問

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい.

1 つの袋と 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ用意されており, 袋の中にはこの 4 枚のカードが入れられているとする. このとき, 十分に多くの球と 4 つの箱 A_1, A_2, A_3, A_4 に対する次の操作 T を考える.

> 操作 T
>
> (T1) 袋の中から無作為にカード 1 枚を取り出す.
>
> (T2) 取り出されたカードに書かれている数字が k のとき, 箱 A_k の中に球を 1 つ入れる.
>
> (T3) 取り出したカードを袋の中に戻す.

以下, n, m は自然数として, すべての箱が空の状態から始めて操作 T を繰り返し行って, 4 つの箱すべてに少なくとも 1 個の球が入れられたところで操作 T を終了するとする.

(1) 操作 T をちょうど n 回繰り返して終了する確率を p_n とすると, $p_n = \boxed{（あ）}$ である. ただし, $n \geqq 4$ とする.

(2) 操作 T をちょうど n 回繰り返して終了したとき, 同じ箱に連続して球が入れられることがなかった確率を q_n とすると, $q_n = \boxed{（い）}$ である. ただし, $n \geqq 4$ とする.

(3) 操作 T を偶数回繰り返して終了する確率は $\boxed{（う）}$ である.

(4) 操作 T の開始後に箱 A_1 に入れられている球の個数が他の箱に入れられている球の個数よりも多い状態を常に保って, 操作 T をちょうど 8 回繰り返して終了する確率は $\boxed{（え）}$ である.

(5) 操作 T をちょうど $2m+1$ 回繰り返して終了し, 終了時に箱 A_1 に奇数個の球が入れられている確率を r_m とすると, $r_m = \boxed{（お）}$ である. ただし, $m \geqq 2$ とする.

第 3 問

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい. また, 設問 (4) に答えなさい.

正の実数 $s,\ t,\ u$ に対して, 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{s}+\dfrac{y^2}{3t}=1$ および双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{u}-\dfrac{y^2}{t}=1$ を考える. 楕円 C_1 は点 $(\sqrt{3},\ 0)$ を焦点に持ち, 楕円 C_1 と双曲線 C_2 は第 1 象限の点 P で交わり, 交点 P における C_1 の接線と C_2 の接線は互いに直交しているとする.

(1) $s,\ u$ を t を用いて表すと $s=$ $\boxed{\text{(あ)}}$ かつ $u=$ $\boxed{\text{(い)}}$ である.

(2) 交点 P の座標を t を用いて表すと P($\boxed{\text{(う)}}$, $\boxed{\text{(え)}}$) であり, 条件を満たすように t を変化させたときの点 P の軌跡と x 軸, y 軸で囲まれた領域の面積は $\boxed{\text{(お)}}$ である.

(3) 点 P における C_1 の接線, C_2 の接線および x 軸で囲まれた三角形の面積を T とする. T を t を用いて表すと $T=$ $\boxed{\text{(か)}}$ である.

(4) 楕円 C_1 と双曲線 C_2 で囲まれた領域のうち $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ に含まれる部分の面積を S とするとき, $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \displaystyle\lim_{t \to +0} \dfrac{S}{t^2} < \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ が成り立つことを示しなさい. ただし, $\displaystyle\lim_{t \to +0} \dfrac{S}{t^2}$ が収束することは証明なしで利用してよいとする.

第 4 問

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい. また, 設問 (1) に答えなさい.

(1) p を正の実数, n を 2 以上の自然数とし, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^p} - \left\{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k x^{pk}\right\}$

とおくとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $x \neq -1$ を満たす任意の実数 x に対して $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b(2x-1)}{x^2-x+1} + \dfrac{c}{x^2-x+1}$

が成立するような実数の定数 a, b, c の値は $a = \boxed{（あ）}$, $b = \boxed{（い）}$, $c = \boxed{（う）}$

であり, 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots\cdots$ の和の値は $\boxed{（え）}$ である.

(3) $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対して $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくとき, $1-z$ の絶対値と偏角は $|1-z| = 2\sin\boxed{（お）}$, $\arg(1-z) = \boxed{（か）}$ と θ を用いて表される. よって, $z + z^3 + z^5 + \cdots\cdots + z^{2n-1} = \dfrac{z(1-z^{2n})}{1-z^2} = \boxed{（き）}\left(\cos\boxed{（く）} + i\sin\boxed{（く）}\right)$ と θ, n を用いて表される. ただし, $0 \leqq \arg(1-z) < 2\pi$ とし, 空欄に入る数または式は実数値を取るとする.

(4) $I_n = \displaystyle\lim_{\alpha\to+0} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\,d\theta$ とおくと, (3) における和 $z + z^3 + z^5 + \cdots\cdots + z^{2n-1}$

の実部を考えることにより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{（け）}$ と求まる.

慶應大学医学部2022年度予想問題解答

第1問

(1) $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると, $f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+4x+1$ であり, $x=-1$ を代入して $f(-1)=-3\cdots$① を得る. $(x-2)f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると, $(x-2)f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+5x-2\cdots$② であり, $x=1$ を代入して $f(1)=-3\cdots$③ を得る. $f(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割った商を $Q_3(x)$, 余りを $ax+b$ とすると, $f(x)=(x+1)(x-1)Q_3(x)+ax+b$ であり, $x=-1,1$ を代入して①と③を利用すると, $f(-1)=-a+b=-3$, $f(1)=a+b=-3$ を得る. これより, $a=0$, $b=-3$ となるから, $f(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割った余りは -3 である.

②の両辺を微分すると $f(x)+(x-2)f'(x)=2(x-1)Q_2(X)+(x-1)^2{Q_2}'(x)+5$ となり, $x=1$ を代入して③を利用すると, $f'(1)=-8\cdots$④ を得る. ここで, $f(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割った商を $Q_4(x)$, 余りを $R(x)$ とすると, $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $4x+1$ であり, $R(x)$ は3次以下より, $R(x)=(x+1)^2(px+q)+4x+1$ とおけて, $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2Q_4(x)+(x+1)^2(px+q)+4x+1\cdots$⑤ となる. よって, ⑤に $x=1$ を代入して③を利用すると $f(1)=4(p+q)+5=-3$ すなわち $p+q=-2\cdots$⑥ を得る. さらに, ⑤の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+(x+1)^2\cdot 2(x-1)Q_4(x)\\&\quad+(x+1)^2(x-1)^2{Q_4}'(x)+2(x+1)(px+q)+(x+1)^2\cdot p+4\end{aligned}$$

となり, $x=1$ を代入して④を利用すると, $f'(1)=4(p+q)+4p+4=-8\cdots$⑦ を得る. よって, ⑥と⑦より $p=-1$, $q=-1$ となるから

$$R(x)=(x+1)^2(-x-1)+4x+1=-x^3-3x^2+x$$

すなわち

$$f(x)=(x+1)^2(x-1)^2Q_4(x)-x^3-3x^2+x$$

が成立する. したがって, 条件を満たす最低次数の多項式は $f(x)=-x^3-3x^2+x$ である.

(2) $f(x)=2\sin 10x-5\sin 4x$ を微分して $f'(x)=20\cos 10x-20\cos 4x=-10\sin 7x\sin 3x$ となる. $f(x)$ は周期 π を持つ周期関数なので $0\leqq x<\pi$ の範囲の極値を調べると

$$a_1=\frac{\pi}{7},\ a_2=\frac{2\pi}{7},\ a_3=\frac{\pi}{3},\ a_4=\frac{3\pi}{7},\ a_5=\frac{4\pi}{7},\ a_6=\frac{2\pi}{3},\ a_7=\frac{5\pi}{7},\ a_8=\frac{6\pi}{7}$$

の8個が存在する. ここで, $99=8\times 12+3$ であるから, $a_{99}=12\pi+a_3=12\pi+\dfrac{\pi}{3}$

となり, $f(a_{99}) = f\left(12\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin\dfrac{10\pi}{3} - 5\sin\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である.

$f(x)$ が極値を取る x の値のうち $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3}$ の範囲に含まれるものは

$$a_4 = \frac{3\pi}{7},\ a_5 = \frac{4\pi}{7},\ a_6 = \frac{2\pi}{3},\ a_7 = \frac{5\pi}{7},\ a_8 = \frac{6\pi}{7},\ a_9 = \frac{8\pi}{7},\ a_{10} = \frac{9\pi}{7}$$

であり, k を整数とするとき

$f\left(\dfrac{k\pi}{7}\right) = 2\sin\dfrac{10k\pi}{7} - 5\sin\dfrac{4k\pi}{7} = 2\sin\dfrac{14k\pi - 4k\pi}{7} - 5\sin\dfrac{4k\pi}{7} = -7\sin\dfrac{4k\pi}{7}$,

$f\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) = 2\sin\dfrac{10k\pi}{3} - 5\sin\dfrac{4k\pi}{3} = 2\sin\dfrac{12k\pi - 2k\pi}{3} - 5\sin\dfrac{6k\pi - 2k\pi}{3} = 3\sin\dfrac{2k\pi}{3}$

となるので

$$\begin{aligned}
f(a_4) &= -7\sin\frac{12\pi}{7} = -7\sin\frac{14\pi - 2\pi}{7} = 7\sin\frac{2\pi}{7},\\
f(a_5) &= -7\sin\frac{16\pi}{7} = -7\sin\frac{14\pi + 2\pi}{7} = -7\sin\frac{2\pi}{7}\\
f(a_6) &= 3\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2},\\
f(a_7) &= -7\sin\frac{20\pi}{7} = -7\sin\frac{21\pi - \pi}{7} = -7\sin\frac{\pi}{7},\\
f(a_8) &= -7\sin\frac{24\pi}{7} = -7\sin\frac{21\pi + 3\pi}{7} = 7\sin\frac{3\pi}{7},\\
f(a_9) &= -7\sin\frac{32\pi}{7} = -7\sin\frac{35\pi - 3\pi}{7} = -7\sin\frac{3\pi}{7},\\
f(a_{10}) &= -7\sin\frac{36\pi}{7} = -7\sin\frac{35\pi + \pi}{7} = 7\sin\frac{\pi}{7},
\end{aligned}$$

であり, $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3}$ の範囲に含まれる $f(x)$ の極値の総和は $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となる.

(3) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$ となるので $x^2 - xy + y^2 = m$, $x^2 + xy + y^2 = n$ とおくと, $x > 0$, $y > 0$ より $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 > 0$ より $0 < m < n$ である. このとき, $x^2 + y^2 = \dfrac{m+n}{2}$, $xy = \dfrac{n-m}{2}$ より, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \dfrac{3n - m}{2}$ すなわち $x + y = \sqrt{\dfrac{3n-m}{2}}$ となる. よって, $\dfrac{3n-m}{2} = k^2$ を満たす自然数 k が存在する. ここで, t についての 2 次方程式 $t^2 - \sqrt{\dfrac{3n-m}{2}}t + \dfrac{n-m}{2} = 0$ は x, y を 2 解に持つ. この 2 次方程式の判別式を D とすると, $D = \dfrac{3n-m}{2} - 4\cdot\dfrac{n-m}{2} = \dfrac{3m-n}{2}$ であり, 解の公式より $t = \dfrac{k \pm \sqrt{D}}{2}$ となるから, $n < 3m$ かつ $\dfrac{3m-n}{2} = l^2$ を満たす自然数 l が存在する.

以上より, $mn = 3 \cdot 13 \cdot p$ かつ $0 < m < n < 3m$ となることが必要である．このとき, $(m,\ n) = (1,\ 39p), (3,\ 13p), (13p,\ 3), (39p,\ 1)$ は $0 < m < n < 3m$ を満たす自然数が存在しないため不適であり, $(m,\ n) = (13,\ 3p), (39,\ p), (p,\ 39), (3p,\ 13)$ について調べればよい．

(i) $(m,\ n) = (13,\ 3p)$ のとき, $13 < 3p < 39$ を満たす素数は $p = 5, 7, 11$ であり, それぞれ $k^2 = \dfrac{3n-m}{2} = \dfrac{9p-13}{2} = 16, 25, 43$ かつ $D = \dfrac{3m-n}{2} = \dfrac{39-3p}{2} = 12, 9, 3$ となるから, これらがともに平方数となるのは $p = 7$ である．このとき, $t = \dfrac{k \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = 1, 4$ より $(x,\ y,\ p) = (1,\ 4,\ 7)$ である．

(ii) $(m,\ n) = (39,\ p)$ のとき, $39 < p < 117$ を満たす素数を調べればよい．ここで, $D = \dfrac{3m-n}{2} = \dfrac{117-p}{2}$ について, $0 < D < 39$ を満たす平方数より $D = 1, 4, 9, 16, 25, 36$ のいずれかであり, それぞれ $p = 115, 109, 99, 85, 67, 45$ となるので, 素数となるものより $p = 67, 109$ でなければならない．これは, それぞれ $k^2 = \dfrac{3n-m}{2} = \dfrac{3(p-13)}{2} = 81, 144$ と平方数になるので適する．よって, $p = 67$ のとき $t = \dfrac{k \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{9 \pm 5}{2} = 2, 7$, $p = 109$ のとき $t = \dfrac{k \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{12 \pm 2}{2} = 5, 7$, より $(x,\ y,\ p) = (2,\ 7,\ 67), (5,\ 7,\ 109)$ である．

(iii) $(m,\ n) = (p,\ 39)$ のとき, $p < 39 < 3p$ すなわち $13 < p < 39$ を満たす素数を調べればよい．ここで, $D = \dfrac{3m-n}{2} = \dfrac{3(p-13)}{2}$ について, $0 < D < 39$ を満たす 3 で割り切れる平方数より $D = 9, 36$ のいずれかであり, それぞれ $p = 19, 37$ となり素数である．このとき, それぞれ $k^2 = \dfrac{3n-m}{2} = \dfrac{117-p}{2} = 49, 40$ となり, 平方数となるのは $p = 19$ である．よって, $p = 19$ のとき $t = \dfrac{k \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$ より $(x,\ y,\ p) = (2,\ 5,\ 19)$ である．

(iv) $(m,\ n) = (3p,\ 13)$ のとき, $3p < 13 < 9p$ を満たす素数 $p = 2, 3$ を調べればよいが, それぞれ $D = \dfrac{3m-n}{2} = \dfrac{9p-13}{2} = \dfrac{5}{2}, 7$ となり平方数でないので不適である．

以上より, 条件を満たす組は

$$(x,\ y,\ p) = (1,\ 4,\ 7), (2,\ 5,\ 19), (2,\ 7,\ 67), (5,\ 7,\ 109)$$

の全部で 4 組あり, そのうち p が最大である組は $(x,\ y,\ p) = (5,\ 7,\ 109)$ である．

第2問

(1) n 回目の操作 T で箱 A_4 に球が入れられて終了する場合を考えると, $1\sim n-1$ 回目の操作 T では A_1, A_2, A_3 のいずれにも少なくとも 1 回以上球が入れられるので $3^{n-1}-3-3(2^{n-1}-2)=3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3$ 通りがある. n 回目の操作 T で箱 A_1, A_2, A_3 に球が入れられて終了する場合も同様なので

$$p_n=\frac{(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)\cdot 4}{4^n}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}$$

(2) 操作 T をちょうど n 回繰り返して終了する事象を E, 同じ番号のカードが連続して出ることがない事象を F とすると, 確率 q_n は条件付き確率 $P_E(F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(E)}$ となる. ここで, $P(E)=p_n$ であるから, $P(E\cap F)$ を求めればよい. n 回目の操作 T で箱 A_4 に球が入れられて終了する場合を考えると, 1 回目の操作 T では A_1, A_2, A_3 のいずれの箱に球が入れられてもよく, $2\sim n-1$ 回目の操作 T では直前に球が入れられた箱と A_4 以外の 2 つの箱のいずれかに入れていけばよいので, 2 つの箱のみに球が交互に入る場合の 6 通りを除いて $3\cdot 2^{n-2}-6$ 通りがある. n 回目の操作 T で箱 A_1, A_2, A_3 に球が入れられて終了する場合も同様なので

$$P(E\cap F)=\frac{(3\cdot 2^{n-2}-6)\cdot 4}{4^n}=\frac{3\cdot 2^{n-2}-6}{4^{n-1}}$$

よって, 求める確率は

$$q_n=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{3\cdot 2^{n-2}-6}{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}=\frac{2^{n-2}-2}{3^{n-2}-2^{n-1}+1}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}p_{2k}&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^{2k-1}-3\cdot 2^{2k-1}+3}{4^{2k-1}}\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{2k-1}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{2k-1}\right\}\end{aligned}$$

であり, 公比 $r=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ はいずれも $|r|<1$ を満たすのでそれぞれの無限等比級数は収束して

$$\sum_{k=2}^{\infty}p_{2k}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}-3\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+3\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{18}{35}$$

(4) 8 回目の操作 T で球が入れられる箱は A_1 以外の 3 つのいずれかで 3 通りがある. 8 回目の操作 T で箱 A_4 に球が入れられた場合を考えると, 1 回目, 2 回目の操作 T では必ず箱 A_1 に球が入れられる. 3 回目の操作 T で箱 A_1 に球が入れられたとき,

4~7 回目の操作 T で球が入れられる箱は A_1, A_1, A_2, A_3 の並べ替えの $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り, A_1, A_2, A_2, A_3 の並べ替えの $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り, A_1, A_2, A_3, A_3 の並べ替えの $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り, A_2, A_2, A_3, A_3 の並べ替えの $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通りのいずれかの 42 通りである. 3, 4 回目の操作 T で A_2, A_1 の順に球が入れられたとき 5~7 回目の操作 T で球が入れられる箱は A_1, A_1, A_3 の並べ替えの $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り, A_1, A_2, A_3 の並べ替えの $3!=6$ 通り, A_1, A_3, A_3 の並べ替えの $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り, A_2, A_3, A_3 の並べ替えの $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通りのいずれかの 15 通りである. 3, 4 回目の操作 T で A_3, A_1 の順に球が入れられたときも同様に 15 通りある. 3~5 回目の操作 T で A_2, A_3, A_1 の順に球が入れられたとき 6, 7 回目の操作 T で球が入れられる箱は A_1, A_1 の 1 通り, A_1, A_2 の並べ替えの 2 通り, A_1, A_3 の並べ替えの 2 通り, A_2, A_3 の並べ替えの 2 通りのいずれかの 7 通りである. 3~5 回目の操作 T で A_3, A_2, A_1 の順に球が入れられたときも同様に 7 通りある. 以上で $42+15+15+7;7=86$ 通りとなり, 8 回目の操作 T で箱 A_2, A_3 に球が入れられるときもそれぞれ同様なので, 条件を満たす全パターンの合計は $86\times 3=258$ 通りある. よって, 求める確率は $\dfrac{258}{4^8}=\dfrac{129}{32768}$ である.

(5) $2m+1$ 回目の操作 T で箱 A_1 に球が入れられて終了する場合を考える. すると, 1~ $2m$ 回目の操作 T では A_1 には球が入らず, A_2, A_3, A_4 のいずれにも少なくとも 1 回以上球が入ることになるので $3^{2m}-3-3(2^{2m}-2)=9^m-3\cdot 4^m+3$ 通りの場合がある. よって, $2m+1$ 回目の操作 T で箱 A_1 に球が入れられて終了する場合の確率 P_1 は

$$P_1=\frac{9^m-3\cdot 4^m+3}{4^{2m+1}}$$

である.

$2m+1$ 回目の操作 T で箱 A_4 に球が入れられて終了する場合を考える. 1~ $2m$ 回目の操作 T で A_1 に $2k-1$ 個（$1\leqq k\leqq m-1$）の球が入れられるとすると, A_1 に球が入れられる回の選び方が ${}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}$ 通りある. A_2, A_3 への残りの $2m-2k+1$ 個の球の入れ方は, A_2, A_3 のいずれにも少なくとも 1 回以上球が入ることになるため $2^{2m-2k+1}-2$ 通りあるので, 全部で ${}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}(2^{2m-2k+1}-2)$ 通りの入れ方がある. $2m+1$ 回目の操作 T で箱 A_2, A_3 に球が入れられて終了する場合も同様なので, $2m+1$ 回目の操作 T で箱 A_2, A_3, A_4 のいずれかに球が入れられて終了する場合の確率 $P_{2,3,4}$ は

$$P_{2,3,4}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{3\cdot{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}(2^{2m-2k+1}-2)}{4^{2m+1}}$$
$$=\frac{3}{4^{m+1}}\sum_{k=1}^{m-1}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}-\frac{6}{4^{2m+1}}\sum_{k=1}^{m-1}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}$$

ここで, $A=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$, $B=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ とおくと

$$A+B=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2m}=\left(\frac{9}{4}\right)^{m}$$
$$-A+B=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2m}=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}$$

となるので, $A=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{m}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m}\right\}=\dfrac{9^m-1}{2\cdot4^m}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}=A-{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$$
$$=\frac{9^m-1}{2\cdot4^m}-2m\cdot\frac{2}{4^m}=\frac{9^m-8m-1}{2\cdot4^m}$$

また, $C=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}$, $D=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}$ とおくと

$$C+D=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{k}=(1+1)^{2m}=4^m$$
$$-C+D=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{k}(-1)^k=(1-1)^{2m}=0$$

となるので, $C=\dfrac{1}{2}\left(4^m-0\right)=\dfrac{4^m}{2}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}=C-{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}=\frac{4^m}{2}-2m=\frac{4^m-4m}{2}$$

よって, $P_{2,3,4}$ は

$$P_{2,3,4}=\frac{3}{4^{m+1}}\cdot\frac{9^m-8m-1}{2\cdot4^m}-\frac{6}{4^{2m+1}}\cdot\frac{4^m-4m}{2}$$
$$=\frac{3\cdot9^m-6\cdot4^m-3}{2\cdot4^{2m+1}}$$

以上より, 求める確率 r_m は

$$r_m=P_1+P_{2,3,4}=\frac{9^m-3\cdot4^m+3}{4^{2m+1}}+\frac{3\cdot9^m-6\cdot4^m-3}{2\cdot4^{2m+1}}$$
$$=\frac{5\cdot9^m-3\cdot4^{m+1}+3}{2\cdot4^{2m+1}}$$

である.

第 3 問

(1) C_1 の焦点 $(\sqrt{3},\ 0)$ が x 軸上にあることから $s>3t$ であり，$\sqrt{s-3t}=\sqrt{3}$ となるので，$s=3(t+1)$ である．よって，$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，$\dfrac{X^2}{3(t+1)}+\dfrac{Y^2}{3t}=1\cdots①$ および $\dfrac{X^2}{u}-\dfrac{Y^2}{t}=1\cdots②$ が成立し，交点 P における C_1, C_2 の接線の方程式はそれぞれ $\dfrac{Xx}{3(t+1)}+\dfrac{Yy}{3t}=1$ および $\dfrac{Xx}{u}-\dfrac{Yy}{t}=1$ であり，法線ベクトルはそれぞれ $\left(\dfrac{X}{3(t+1)},\ \dfrac{Y}{3t}\right)$ および $\left(\dfrac{X}{u},\ -\dfrac{Y}{t}\right)$ となるから，2 接線の直交条件より $\left(\dfrac{X}{3t+3},\ \dfrac{Y}{3t}\right)\cdot\left(\dfrac{X}{u},\ -\dfrac{Y}{t}\right)=0$ すなわち $\dfrac{X^2}{(t+1)u}=\dfrac{Y^2}{t^2}$ が成立する．これより，実数 k を用いて $X^2=(t+1)uk$, $Y^2=t^2k$ とおけるので，①より $\dfrac{(t+1)uk}{3(t+1)}+\dfrac{t^2k}{3t}=1$ すなわち $(u+t)k=3$ となり，②より $\dfrac{(t+1)uk}{u}-\dfrac{t^2k}{t}=1$ すなわち $k=1$ となるから，$u=3-t$ となる．

(2) (1) より $X^2=(t+1)(3-t)$, $Y^2=t^2$ となり，$X>0$, $Y>0$, $t>0$, $3-t=u>0$ であるから，$X=\sqrt{(t+1)(3-t)}$, $Y=t$ すなわち $\mathrm{P}\left(\sqrt{(t+1)(3-t)},\ t\right)$ である．

　このとき，$X^2=(Y+1)(3-Y)$ すなわち $X^2+(Y-1)^2=4$ となるので，点 P の軌跡は中心 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，半径 2 の円の第 1 象限の部分となる．この円と x 軸，y 軸との交点を $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 3)$ とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{2\pi}{3}$ となるので，点 P の軌跡と x 軸，y 軸で囲まれた領域の面積 S は，半径 2，中心角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の扇形と $\triangle\mathrm{AOC}$ の面積の和より，$S=\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1=\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

(3) 交点 P における C_1, C_2 の接線 $\dfrac{Xx}{3(t+1)}+\dfrac{Yy}{3t}=1$ および $\dfrac{Xx}{u}-\dfrac{Yy}{t}=1$ と x 軸との交点をそれぞれ Q, R とすると $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3(t+1)}{X},\ 0\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{u}{X},\ 0\right)$ であり，$u=3-t$, $X=\sqrt{(t+1)(3-t)}$ により $\mathrm{Q}\left(3\sqrt{\dfrac{t+1}{3-t}},\ 0\right)$, $\mathrm{R}\left(\sqrt{\dfrac{3-t}{t+1}},\ 0\right)$ となる．これより，

点 P における C_1 の接線，C_2 の接線および x 軸で囲まれた三角形 PRQ の面積 T は $T=\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{\dfrac{t+1}{3-t}}-\sqrt{\dfrac{3-t}{t+1}}\right)t=\dfrac{2t^2}{\sqrt{(t+1)(3-t)}}$ である．

(4) x 軸の正の部分にある C_1, C_2 の頂点をそれぞれ M, N とおくと，$\mathrm{M}(\sqrt{3(t+1)},\ 0)$, $\mathrm{N}(\sqrt{3-t},\ 0)$ である．よって，三角形 PNM の面積を U とおくと

$U=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3(t+1)}-\sqrt{3-t}\right)t=\dfrac{2t^2}{\sqrt{3(t+1)}+\sqrt{3-t}}$ となる．ここで, 面積の大小関係 $U<S<T$ が成立するから

$$\frac{2t^2}{\sqrt{3(t+1)}+\sqrt{3-t}}<S<\frac{2t^2}{\sqrt{(t+1)(3-t)}}$$

すなわち

$$\frac{2}{\sqrt{3(t+1)}+\sqrt{3-t}}<\frac{S}{t^2}<\frac{2}{\sqrt{(t+1)(3-t)}}$$

となる．このとき, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{2}{\sqrt{3(t+1)}+\sqrt{3-t}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{2}{\sqrt{(t+1)(3-t)}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

であるから, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{S}{t^2}<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ が成立することが示された.

第 4 問

(1) $x\neq-1$ とすると $-x^p\neq1$ であるから, 初項 1, 公比 $-x^p$, 項数 n の等比数列の和より $1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^{pk}=\frac{1\cdot\{1-(-x^p)^n\}}{1-(-x^p)}=\frac{1-(-1)^n x^{pn}}{1+x^p}$ となり

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^p}-\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^{pk}\right\}=\frac{(-1)^n x^{pn}}{1+x^p}$$

である．このとき, $0\leqq x\leqq1$ において $0\leqq\dfrac{x^{pn}}{1+x^p}\leqq x^{pn}$ であるから,

この区間で定積分して $0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{pn}}{1+x^p}\,dx\leqq\int_0^1 x^{pn}\,dx$ を得る．したがって,

$\displaystyle\int_0^1 x^{pn}\,dx=\left[\frac{x^{pn+1}}{pn+1}\right]_0^1=\frac{1}{pn+1}$ と $\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|=\int_0^1\frac{x^{pn}}{1+x^p}\,dx$ より

$0\leqq\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|\leqq\frac{1}{pn+1}$ が成立し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{pn+1}=0$ であるから,

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$ となることが示された.

(2) 与式を通分した分子について $a(x^2-x+1)+b(2x-1)(x+1)+c(x+1)=1$

すなわち $(a+2b)x^2+(-a+b+c)x+a-b+c=1$ が恒等的に成立する条件より

$a+2b=0$ かつ $-a+b+c=0$ かつ $a-b+c=1$ となるから $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{6}$, $c=\dfrac{1}{2}$

である．このとき, $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

x	0	$\to$	1
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\Big[\log|x+1|\Big]_0^1-\frac{1}{6}\Big[\log|x^2-x+1|\Big]_0^1+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\log 2+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sqrt{3}}{3}\,d\theta=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$
となる.

$p=3$ とすると $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^3}-\left\{1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^{3k}\right\}$ となり, 区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定積分して $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx-\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^{3k}\right\}\,dx$ を得る.

ここで, $\displaystyle\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^{3k}\right\}\,dx=\left[x+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}$

となるから, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ より
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\int_0^1 f_n(x)\,dx$$
であり, (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$ であるから
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$
(3) $1-z=1-\cos\theta-i\sin\theta=1-\cos\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$
$$=-2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+3\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+3\pi}{2}\right)$$
ここで, $0<\theta<\pi$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ かつ $\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\theta+3\pi}{2}<2\pi$ となり, $1-z$ の絶対値は $|1-z|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$, 偏角は $\arg(1-z)=\dfrac{\theta+3\pi}{2}$ で適する.

ここで, $z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, $z^{2n}=\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta$ より, 同様にして
$$1-z^2=2\sin\theta\left\{\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

$$1-z^{2n}=2\sin n\theta\left\{\cos\left(n\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

となるから

$$\begin{aligned}\frac{z(1-z^{2n})}{1-z^2}&=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot 2\sin n\theta\left\{\cos\left(n\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}}{2\sin\theta\left\{\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}}\\&=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}(\cos n\theta+i\sin n\theta)\end{aligned}$$

(4) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$$\begin{aligned}z+z^3+z^5+\cdots\cdots+z^{2n-1}&=\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta+i\sin\theta)^{2k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\{\cos(2k-1)\theta+i\sin(2k-1)\theta\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta\end{aligned}$$

であり, 一方で, $z+z^3+z^5+\cdots\cdots+z^{2n-1}=\dfrac{z(1-z^{2n})}{1-z^2}=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

であるから, 実部を比較して

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta=\frac{\sin n\theta\cos n\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

となるので

$$\begin{aligned}I_n&=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta\,d\theta\\&=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}}{2k-1}-\frac{\sin(2k-1)\alpha}{2k-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\end{aligned}$$

が成立する.

$p=2$ とすると $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\left\{1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^kx^{2k}\right\}$ となり, 区間 $0\leqq x\leqq 1$

で定積分して $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^kx^{2k}\right\}dx$ を得る.

ここで, $\displaystyle\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^kx^{2k}\right\}dx=\left[x+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

となるから,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

であり, (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

となる.

このとき, $x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4}\end{array}$ であるから

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4} \text{ より } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$$

となるので, 求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{8}$$

- コメント

1 次試験は全科目で 500 点満点で、そのうち数学が 150 点を占める。試験時間は 100 分で、第 1 問が 3 題からなる小問集合、第 2 問、第 3 問、第 4 問が大問となっている。出題形式は、大部分が問題文の空所補充形式となっているが、大問中で 1〜2 か所のみ証明の論述やグラフの図示などの記述が要求される。空所補充では係数に 0 や 1 を記入させるというような特殊なケースもあるので意識しておく必要があるだろう。第 1 問は、比較的対応が容易な出題内容（少なくとも 1 題は基礎レヴェル）であることが多いので、基本的には完答が要求されるが、2018 年度の (3) のような難度の高い問題が出題されたこともある。第 2 問（第 3 問だった年度もある）は、毎年、操作を繰り返し行う形の確率の問題が出題されてきたが（問題文中に枠で囲って操作 T として与える形式はほぼ不変だった）、2021 年は確率ではなくデータの分析の問題が出題された。とはいえ、従来の傾向に従って、確率についての過去問およびその類題の演習による対策は必須である。確率の出題内容は、基本的には確率漸化式の出題が多いが、そうでない年度（この 10 年間では 2011、2012、2020 年）もあるので、よく見極めて解答方針を立てよう。また、データの分析についても対策はしっかりおこなっておく必要があるだろう。第 3, 4 問のうち 1 題は微積分を中心とした出題がされており、計算量が非常に多くなる場合もあって、粘り強い計算力が要求されることが少なくない。試験時間からすると相当に厳しい出題内容なので、結果を覚えていてショートカット出来る部分などがある場合にはうまく活用したうえで、比較的解きやすい部分を正確に素早く処理して、難所を考えるための時間を確保していきたい。全体とし

て、基本的な典型問題から超難問まで幅広い出題で構成されており、受験者の層を考えると、数学について真の実力を身につけなければ合格ラインに到達できない内容となっている。