埼玉医コメント

《コメント》　2020 年までは試験時間は 60 分で, 大問 4 問の出題であり, 第 1 問は小問集合, 残りの 3 問は大問である. 2019 年は第 1 問は常用対数, 平面図形, 3 次関数の最大の小問集合であり, 第 2 問は三角不等式, 3 次関数と面積, 第 3 問はド・モアブルの定理と関数の極限, 第 4 問はさいころを投げるときの確率の問題であった. 難易度は標準で, 数 III の微積が少なかった.
2020 年は第 1 問が対数方程式, 3 つの集合の要素の個数, 台形の面積の最大を求める問題で, 微分を利用するものであり, 数 III は 1 問であった. 第 2 問は放物線の y 軸まわりの回転体の体積, 第 3 問は正四面体に関するベクトルの問題で, 三角形の面積の最小を考える問題である. 第 4 問はトランプを引く確率の問題で, 最後は条件付確率の問題になっている. 第 2 問から第 4 問の中では, 数 III は第 3 問の体積で 2019 年に比べて数 III の微積分の比重は大きくなった. また, 難易度はすべて標準であった.
2021 年は試験時間が 50 分に減り, 第 1 問の小問も 2 問に減った, 内容を見ると, 第 1 問は (1) が無理関数と絶対値付き 1 次関数との共有点の個数, (2) が三角関数の最小値と加法定理の計算の小 2 問, 第 2 問は定積分で表された関数, 3 次関数の最小であり, 数 II の範囲でできる微積分の問題であった. 第 3 問は円に内接する四角形, 第 4 問は 3 項関漸化式を作って解く問題であった.2021 年は数 III の比重が極端に少なかった. また, 難易度も基本から標準でやりやすい問題が並んでいた. 2022 年は, 数 III の対策もきちんとしておいたほうが良い,

予想問題 $\boxed{1}$ では問 1 は整数の除法の関係式を作って, 連立方程式を解く問題で, 問 2 は三角不等式で合成を使う問題, 問 3 は複素数の極形式, ド・モアブルの定理の問題, 問 4 は整数と数列の和の融合で, 周期性を見つけることがポイントとなる.
予想問題 $\boxed{2}$ は, 内積を用いた三角形の面積の公式, 共面条件, 点が三角形の内部にある条件に関する問題である.
予想問題 $\boxed{3}$ では, 楕円の 2 接線のなす角を正接の加法定理を用いて求める問題と, 分数関数の最大を求める問題で方針のつかみやすい問題である.
予想問題 $\boxed{4}$ では, サイコロを投げる確率の問題で, 連続して同じ目が出る確率だから, 何回連続するかで場合分けするか, 何回目から連続するかで場合分けするかのどちらかである.

埼玉医科大学予想問題

$\boxed{1}$ **次の問い(問１～４)の各枠に当てはまる数字をマークせよ.**

問１ m と n を正の整数とする.n を m で割ると７余り,$n+13$ は m で割り切れるとき,m の値を求めると小さい順に $m=\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ または $m=\boxed{(3)}\boxed{(4)}$ である.

問２ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき,不等式 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta<1$ の解は $\dfrac{\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}\pi<\theta<\dfrac{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}\pi$ である.

問３ 複素数 z の偏角が $\dfrac{4\pi}{3}$ で,$1-z$ の偏角が $\dfrac{\pi}{4}$ とする.このとき, z の絶対値は $\sqrt{\boxed{(10)}}+\boxed{(11)}$ であり,$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5$ の偏角 θ は $\theta=\dfrac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}\pi$ である.ただし,$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

問４ 自然数 n に対して,n^2 を７で割った余りを a_n とすると,$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n=\boxed{(14)}\boxed{(15)}$ である.また,b_n を n^2 以下の７の倍数の中で最も大きい数とすると,$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} b_n=\boxed{(16)}\boxed{(17)}\boxed{(18)}\boxed{(19)}\boxed{(20)}$ である.

$\boxed{2}$ 次の文章を読み，下の問い（問１～３）の各枠に当てはまる数字をマークせよ．
空間において，3 点 A(0, 0, 2)，B(1, 0, 1)，C(0, 1, 3) を通る平面 π がある．

問１　△ABC の面積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{(21)}}}{\boxed{(22)}}$$

である．

問２　a を定数とし，点 $\mathrm{P}(a,\ a+4,\ 0)$ から平面 π に垂線 l を下ろすと，l と π の交点 H の座標は

$$\left(\boxed{(23)},\ \boxed{(24)},\ \boxed{(25)}\right)$$

である．

$\boxed{(23)}$ に入る式として正しいものを，次の ①～⑨ のうちから１つ選べ．

① 0	② 1	③ 2
④ a	⑤ $a+1$	⑥ $a+2$
⑦ $2a$	⑧ $2a+1$	⑨ $2a+2$

$\boxed{(24)}$ に入る式として正しいものを，次の ①～⑨ のうちから１つ選べ．

① 0	② 1	③ 2
④ a	⑤ $a+1$	⑥ $a+2$
⑦ $2a$	⑧ $2a+1$	⑨ $2a+2$

$\boxed{(25)}$ に入る式として正しいものを，次の ①～⑨ のうちから１つ選べ．

① 0	② 1	③ 2
④ a	⑤ $a+1$	⑥ $a+2$
⑦ $2a$	⑧ $2a+1$	⑨ $2a+2$

問３　H が △ABC の内部にあるための a の条件は

$$-\boxed{(26)} < a < -\frac{\boxed{(27)}}{\boxed{(28)}}$$

である．

$\boxed{3}$ 次の文章を読み，下の問い（問１、２）の各枠に当てはまる数字をマークせよ．
直線 $x=5$ 上の点 $\mathrm{P}(5,\,t)$ から楕円

$$\frac{x^2}{5}+y^2=1$$

にひいた２接線のなす角を $\theta\,(0<\theta<\pi)$ とする．

問１ $\tan\theta$ を t の関数で表すと，

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{\boxed{(30)}\,t^2+\boxed{(31)}\,\boxed{(32)}}}{t^2+\boxed{(33)}\,\boxed{(34)}}$$

となる．

問２ θ の最大値は，

$$\frac{\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}}\pi$$

であり，それを与える t は，

$$t=\pm\sqrt{\boxed{(37)}\,\boxed{(38)}}$$

である．

$\boxed{4}$ サイコロを何回か続けて投げる.

問1 3回続けて投げるとき,同じ目が3回続けて出る確率は,

$$\frac{\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}$$

である.

問2 4回続けて投げるとき,同じ目が3回以上続けて出る確率は,

$$\frac{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}{\boxed{(44)}\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$$

である.

問3 5回続けて投げるとき,同じ目が3回以上続けて出る確率は,

$$\frac{\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}\boxed{(49)}}$$

である.

埼玉医科大学予想問題・解答

$\boxed{1}$ 問１ 条件より，$p,\ q$ を正の整数として，

$$\begin{cases} n=mp+7 \cdots\cdots ① \\ n+13=mq \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②より n を消去すると，

$$(mp+7)+13=mq$$
$$\iff m(q-p)=20$$

ここで，$m>7$ だから，

$$\boldsymbol{m=10,\ 20}\cdots\text{(答)}$$

問２ 与えられた不等式の左辺を合成して，

$$2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<1$$
$$\iff \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$$

この範囲で上の不等式の解は，

$$\frac{5}{6}\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{6}$$
$$\iff \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi}\cdots\text{(答)}$$

問３ $|z|=r\ (r>0)$ とおくと

$$z=r\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=r\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

と表せる．よって

$$1-z=\left(1+\frac{r}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}r}{2}i$$

$\arg(1-z)=\dfrac{\pi}{4}$ だから，$r>0$ より

$$1+\frac{r}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$
$$\iff r=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}\cdots\text{(答)}$$

これは, $r>0$ をみたす.
また, $z \neq 1$ だから

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=\frac{1-z^6}{1-z}$$

ここで

$$z^6=r^6(\cos 8\pi+i\sin 8\pi)=r^6\,(>1)$$

だから $1-z^6$ は負の実数である.
ゆえに

$$\begin{aligned}&\arg(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)\\&=\arg\frac{1-z^6}{1-z}\\&=\arg(1-z^6)-\arg(1-z)\\&=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

問4 $a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=2,\ a_5=4,\ a_6=1,\ a_7=0$ で, これ以降は繰り返しとなるから, 数列 $\{a_n\}$ は周期 7 の繰り返しとなる.
よって,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}a_n&=7(1+4+2+2+4+1+0)+a_{50}\\&=7\cdot 14+1=99\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}b_n&=\sum_{n=1}^{50}n^2-\sum_{n=1}^{50}a_n\\&=\frac{1}{6}\cdot 50\cdot 51\cdot 101-99\\&=42826\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 問1

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

から,

$$|\overrightarrow{AB}|^2=2,\ |\overrightarrow{AC}|^2=2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$$

だから,

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots(\text{答})$$

問2 H は平面 π 上の点だから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる.
よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}-a\\-a-4\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

これが π と垂直だから,

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\iff(-a-2)+2s-t=0\cdots\cdots①$$

であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$\iff(-a-2)-s+2t=0\cdots\cdots②$$

①$\times 2+$② から,

$$3s-3a-6=0\iff s=a+2$$

①$+$②$\times 2$ から,

$$3t-3a-6=0\iff t=a+2$$

ゆえに,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+(a+2)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+(a+2)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\iff \mathrm{H}(a+2,\ a+2,\ 2)$$ ⑥, ⑥, ③ $\cdots$ (答)

問3 H が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部になる条件は,

$$s>0,\ t>0,\ s+t<1$$
$$\iff a+2>0,\ 2a+4<1$$
$$\iff a>-2,\ a<-\frac{2}{3}$$
$$\iff -2<a<-\frac{3}{2}\cdots\text{(答)}$$

$\boxed{3}$ 問1　点Pを通る傾き m の直線の方程式は

$$y = m(x-5)+t$$

で，これが楕円と接するとき，接点の x 座標についての方程式

$$\frac{x^2}{5} + \{m(x-5)+t\}^2 = 1$$
$$\Longleftrightarrow (5m^2+1)x^2 - 10(5m-t)mx + 5(5m-t)^2 - 5 = 0$$

が重解をもつから

$$5m^2(5m-t)^2 - (5m^2+1)\{(5m-t)^2-1\} = 0$$
$$\Longleftrightarrow 20m^2 - 10tm + t^2 - 1 = 0$$

この方程式の2解を m_1, m_2 $(m_1 > m_2)$ とすると

$$m_1 = \frac{5t+\sqrt{5(t^2+4)}}{20},$$
$$m_2 = \frac{5t-\sqrt{5(t^2+4)}}{20}$$

そこで，2接線と x 軸のなす角をそれぞれ

$$\theta_1,\ \theta_2 \quad \left(\theta_1 > \theta_2,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

とすると

$$m_1 = \tan\theta_1,\ m_2 = \tan\theta_2,\ \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\tan\theta = \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$
$$= \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{\dfrac{\sqrt{5(t^2+4)}}{10}}{1+\dfrac{t^2-1}{20}}$$
$$= \frac{2\sqrt{5t^2+20}}{t^2+19} \cdots \text{(答)}$$

問2　$x = t^2,\ f(x) = \dfrac{x+4}{(x+19)^2}$ $(x \geqq 0)$ とおくと

$$\tan\theta = 2\sqrt{5f(t^2)}$$

で

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+19)^2 - (x+4)\cdot 2(x+19)}{(x+19)^4}$$
$$= -\frac{x^2+8x-19\cdot 11}{(x+19)^4}$$
$$= -\frac{(x+19)(x-11)}{(x+19)^4}$$
$$= -\frac{x-11}{(x+19)^3}$$

よって，$f(x)$ の増減は下のようになる．

x	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

ゆえに，$\tan\theta$ は

$$t^2 = x = 11$$

すなわち

$$t = \pm\sqrt{11} \cdots (答)$$

で最大となり，このとき

$$\tan\theta = 2\sqrt{5f(11)} = 2\sqrt{5\cdot\frac{15}{30^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0 < \theta < \pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{6} \cdots (答)$$

$\boxed{4}$ **問1** サイコロを3回投げるとき，目の出方は 6^3 通りあり，このうち，同じ目が3回連続して出るのは，どの目が連続するかの6通りある．
よって，求める確率は，

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \cdots (答)$$

問2 目の出方は全部で 6^4 通り．

$\begin{cases} ○：同じ目 \\ △：○と異なる目 \end{cases}$ と表すことにすると，同じ目が3回だけ続けて出るのは，

○○○△，△○○○

の $6\times5\times2 = 60$ 通り．
また，同じ目が4回続けて出るのは6通り．
よって，求める確率は，

$$\frac{60+6}{6^4} = \frac{11}{6^3} = \frac{11}{216} \cdots (答)$$

(解2) ○，△ は上と同じ意味とし，× をすべての目のうちのどれかとすると，同じ目が3回以上連続して出るのは，

△○○○，○○○×

の $6\times5+6\times6=66$ 通り.
よって,求める確率は,

$$\frac{66}{6^4}=\frac{11}{216}\cdots(答)$$

問3 目の出方は全部で 6^5 通り.
このうち,同じ目が3回以上連続して出るのは,

○○○××, △○○○×, ×△○○○

の3つの場合があるから,

$$6\times6\times6+6\times5\times6+6\times6\times5=6^2\times16\,(通り)$$

よって,求める確率は,

$$\frac{6^2\times16}{6^5}=\frac{16}{6^3}=\frac{2}{27}\cdots(答)$$