2022　昭和大学（Ⅰ期）

出題内容

大問４題で出題され、2018年度からすべての問題が結果のみを解答欄に記入させる形式になった。その結果、証明や図示させる問題は出題されなくなったとみられる。試験時間は英語とあわせて140分。

確率、微分積分は毎年必ず出題されている。また三角関数、対数の扱い、数列、ベクトル、2次曲線などもよく出題される分野である。数学Bの確率分布が出題範囲となっており、期待値の出題もされている。

問題は基本的なものから標準的なものであるが、かなりの計算力を要求されるものもあるので注意が必要である。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

（1） $\sqrt{n^2-15}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

（2） $(xy+x+y+1)^5$ の x^2y^4 の係数を求めよ。

（3） n 角形がある。（ただし、$n \geqq 4$ とする。）

(3-1) 対角線は何本あるか。

(3-2) n 個の頂点のうち、3 つを結んでできる三角形のうち、n 角形と辺を共有しないものはいくつあるか。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ、ただし、（1）（2）は答のみを解答欄に記入せよ。

n を 2 以上の自然数とする。xy 座標平面上に、$0 \leqq x \leqq 1$ で定義され、次式で与えられる 2 つの曲線 C_n, S_n がある。

$$C_n : \sqrt{\pi}y = \sqrt[n]{x}\cos\left(\frac{\pi}{n}x\right) \qquad S_n : \sqrt{\pi}y = \sqrt[n]{x}\sin\left(\frac{\pi}{n}x\right)$$

C_n と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに一回転して得られる立体の体積を V_n、S_n と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに一回転して得られる立体の体積を W_n とする。

（1） V_2 を求めよ。

（2） $\lim_{n\to\infty}(V_n+W_n)^n$ を求めよ。

（3） 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{k=2}^{n} V_k + \sum_{k=2}^{n} W_k < n+3-2\log(n+3)$$

$\boxed{3}$ 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

（1） $\log_3 12 \cdot \log_4 12 - (\log_3 4 + \log_4 3) - 1$ を計算せよ。

（2） 1 つのサイコロを 2 回投げて、出る目を順に 10 の位、1 の位の数として 2 桁の数 X を作り、X を 4 で割った余りを Y とする。このとき、確率変数 Y の期待値を求めよ。

（3） a は正の定数とする。点（1, a）を通り双曲線 $x^2-4y^2=2$ に接する 2 本の直線が直交するとき、a の値を求めよ。

（4） 空間内に点 A（0, 0, 6）を頂点にもち、半径 4 の底円が xy 平面上にある直円錐を考える。点 B（0, $2\sqrt{3}$, 6）と点 C（2, 0, 0）を通る直線 BC と、この直円錐の表面（底円を除く）との交点 P の座標を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

（1）xy 平面上、直線 $y=ax$ （$a>0$）が x 軸と直線 $y=2x$ のなす角を 2 等分するとき、a の値を求めよ。

（2）次の式の値を求めよ。

$$\sum_{k=0}^{199} \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}+\sqrt{k(k+1)}}}$$

（3）$\triangle$ABC において、面積が 1 で AB＝2 であるとき、$BC^2+(2\sqrt{3}-1)AC^2$ の値を最小にするような$\angle$BAC の大きさを求めよ。

（4）さいころを 4 回投げて出た目を順に X_1， X_2， X_3， X_4 とし、

$Y=2^{X_1-1}+2^{X_2-1}+2^{X_3-1}+2^{X_4-1}$ と定義する。Y が奇数となる確率を求めよ。

$\boxed{1}$

（1）$\sqrt{n^2-15}=m$（>0）とおくと、両辺平方して

$$n^2-15=m^2 \qquad \therefore \quad (n-m)(n+m)=15$$

ここで、$0<n-m<n+m$であり、n, mともに自然数であるから

$$(n-m,\ n+m) = (1,\ 15),\ (3,\ 5)$$

$\therefore \quad (n,\ m) = (8,\ 7),\ (4,\ 1)$

ゆえに、$n=4,\ 8$

（2）$(xy+x+y+1)^5=\{(x+1)(y+1)\}^5=(x+1)^5(y+1)^5$

より、$(x+1)^5$におけるx^2の係数と、$(y+1)^5$におけるy^4の係数をかければ良いから

$${}_5C_2\cdot 1^3\times {}_5C_4\cdot 1^1=50$$

（3）

（3-1）n角形のn個の頂点のうち、任意の2頂点を選ぶ組合せの数は

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}\ （通り）$$

あり、こうして選ばれた2点を結んで対角線がひけるが、この中には隣り合う2頂点を結んで、辺になってしまうn通りが含まれている。よって、対角線の総数は

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{1}{2}n(n-3)\ （本）$$

（3-2）n個の頂点のうち、3つを選ぶと三角形が1つ決まる。このような三角形は全部で

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\ （通り）$$

ある。このうち、n角形のある一辺（例えば辺A_1A_2）とだけ辺を共有する三角形は、第3の頂点の選び方を考えて$(n-4)$通りあるので、すべての辺を考えて$n(n-4)$通りある。

また、n角形のある隣り合う2辺（例えばA_1A_2とA_2A_3）を辺にもつ三角形は1通りあるから、全体でn通りある。

よって、求める三角形の総数は

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-n(n-4)-n=\frac{1}{6}n(n^2-9n+20)$$ （通り）

$\boxed{2}$

（1） $C_2:\sqrt{\pi}y=\sqrt{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ より

$$
\begin{aligned}
V_2&=\int_0^1 \pi y^2dx\\
&=\int_0^1 x\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1+\cos\pi x)dx\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[x\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin\pi xdx\right\}\\
&=\underline{\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}}
\end{aligned}
$$

（2） $\begin{cases} V_n=\int_0^1 x^{\frac{2}{n}}\cos^2\left(\frac{\pi}{n}x\right)dx \\ W_n=\int_0^1 x^{\frac{2}{n}}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}x\right)dx \end{cases}$ より

$$
\begin{aligned}
V_n+W_n&=\int_0^1 x^{\frac{2}{n}}\left\{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}x\right)\right\}dx\\
&=\int_0^1 x^{\frac{2}{n}}dx\\
&=\left[\frac{1}{\frac{2}{n}+1}x^{\frac{2}{n}+1}\right]_0^1\\
&=\frac{n}{n+2}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}(V_n+W_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\right\}^2$$

$$=\underline{\frac{1}{e^2}}$$

（3） $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}V_k+\sum_{k=2}^{n}W_k=\sum_{k=2}^{n}(V_k+W_k)$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k+2}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k+2}\right)$$

$$=(n-1)-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+2}\Lambda\ ①$$

ここで、$y=\dfrac{1}{x+2}$はxの減少関数だから、右図より

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+2}>\int_2^{n+1}\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\left[\log(x+2)\right]_2^{n+1}$$

$$=\log(n+3)-\log 4\Lambda\ ②$$

①、②より

$$\sum_{k=2}^{n}V_k+\sum_{k=2}^{n}W_k<(n-1)-2\{\log(n+3)-\log 4\}$$

$$=n+(2\log 4-1)-2\log(n+3)\Lambda\ ③$$

ここで、3と$2\log 4-1$とを比べて

$$3-(2\log 4-1)=4(1-\log 2)$$

$$=4(\log e-\log 2)>0$$

よって、$3>2\log 4-1$であり、③より

$$\sum_{k=2}^{n}V_k+\sum_{k=2}^{n}W_k<n+3-2\log(n+3)$$

が示された。

$\boxed{3}$

（1） $\log_3 12 \cdot \log_4 12 - (\log_3 4 + \log_4 3) - 1$

$= \log_3 12 \cdot \frac{\log_3 12}{\log_3 4} - \left(\log_3 4 + \frac{1}{\log_3 4}\right) - 1$

$= \frac{(1+\log_3 4)^2}{\log_3 4} - \frac{(\log_3 4)^2+1}{\log_3 4} - 1$

$= \frac{2\log_3 4}{\log_3 4} - 1$

$= 2 - 1$

$= 1$

（2） X は 11, 12, …, 65, 66 の 36 通りで、$Y=0$ となるのは

$X = 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 36,\ 44,\ 52,\ 56,\ 64$

のときで、その確率 $P(Y=0)$ は

$$P(Y=0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$Y=1$ となるのは

$X = 13,\ 21,\ 25,\ 33,\ 41,\ 45,\ 53,\ 61,\ 65$

のときで、$P(Y=1) = \frac{1}{4}$

$Y=2$、$Y=3$ となるのも同様にして $P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{4}$

したがって

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{3} k \times P(Y=k)$$

$$= \frac{1}{4} \times (1+2+3)$$

$$= \underline{\frac{3}{2}}$$

（3） 条件をみたす接線は x 軸に垂直でないから、$y = mx + n$ とおく。

これを $x^2 - 4y^2 = 2$ に代入して

$$(4m^2 - 1)x^2 + 8mnx + 2(2n^2 + 1) = 0$$

この方程式について、$4m^2 - 1 \neq 0$ であり、$y = mx + n$ が双曲線に接するための条件は、

判別式をDとすると、$D=0$より

$$\frac{D}{4}=(4mn)^2-2(4m^2-1)(2n^2+1)=-2(4m^2-2n^2-1)=0$$

$$\therefore\quad 4m^2-2n^2=1 \quad \cdots①$$

また、直線$y=mx+n$は点（1, a）を通るから、$a=m+n$より、$n=a-m$ …②

②を①に代入して

$$2m^2+4am-(2a^2+1)=0 \quad \cdots③$$

mの２次方程式③の判別式をD'とすると

$$\frac{D'}{4}=(2a)^2+2(2a^2+1)=8a^2+2>0$$

であるから、③は異なる２つの実数解をもち、接線は２本存在する。

この２本の接線の傾きをm_1, m_2とすると、③の解であるから、解と係数の関係より、

$$m_1m_2=-\frac{2a^2+1}{2}$$

２本の接線が直交するから

$$m_1m_2=-1$$

よって、$-\dfrac{2a^2+1}{2}=-1$から$a^2=\dfrac{1}{2}$

$a>0$より、$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（4）求める点Ｐの座標をＰ（x, y, z）とおく。

点Ｐからz軸に下ろした垂線の足をＨとすると、

Ｈの座標はＨ（0, 0, z）とかける。右図より

$$(6-z):\mathrm{PH}=6:4$$

$$\therefore\quad \mathrm{PH}=4-\frac{2}{3}z$$

また、$\mathrm{PH}=\sqrt{x^2+y^2}$より

$$\sqrt{x^2+y^2}=4-\frac{2}{3}z$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=\left(4-\frac{2}{3}z\right)^2 \cdots①$$

点Ｐは直線BC上の点なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -\sqrt{3}t \\ -3t \end{pmatrix} \cdots ②$$

①, ②より

$$(2+t)^2 + 3t^2 = (4+2t)^2$$

$\therefore \quad t = -1 \cdots ③$

③, ②より

P（1, $\sqrt{3}$, 3）

$\boxed{4}$

（1） $a > 0$ であるから

$$a = \tan\alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

とおくと、α は

$$\tan 2\alpha = 2$$

$$\therefore \quad \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = 2$$

をみたす。よって、

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

（2） $\displaystyle\sum_{k=0}^{199} \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}+\sqrt{k(k+1)}}} = \sum_{k=0}^{199} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1+2\sqrt{k(k+1)}}}$

$$=\sum_{k=0}^{199}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=0}^{199}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{199}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=\sqrt{2}\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\Lambda+(\sqrt{200}-\sqrt{199})\right\}$$
$$=\sqrt{2}\times\sqrt{200}$$
$$=20$$

（3）C から AB に下した垂線の足を H とおく。

△ABC の面積が 1 であるから

$$1=\frac{1}{2}\times 2\times \mathrm{CH}\quad \therefore \mathrm{CH}=1$$

AH$=x$ とおくと

$$\mathrm{AC}=\sqrt{1+x^2},\ \mathrm{BC}=\sqrt{1+(2-x)^2}$$

これを与式に代入して

$$与式=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}+4$$

よって、$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小になる。

AH : CH$=1:\sqrt{3}$

より、∠BAC$=60$

（4）X_1, X_2, X_3, X_4 のうち、どれか 1 つ、または 3 つが 1 になれば良い。よって

$${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+{}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{65}{162}$$