2022　東海大学

出題内容

大問３題で出題される。第１問は小問で構成され、例年 3～5 問からなるが、2017 年度のみ８問と多めの出題であった。あとの２題は１つのテーマを複数の小問で解いていくタイプのもので、うまく誘導がついていることも多い。出題形式はすべて穴埋め式で、試験時間は 70 分。

数学Ⅲ分野はほぼ毎年第２問か第３問に出題されている。また数列や確率の出題も多く、これらが融合された問題も出題されている。

第１問の小問は基本から標準レベルのものが多いが、第２問、第３問は標準からやや難しいレベルのものまで出題される。数年前に比べるとかなり難化した印象を受けるが、うまく時間配分を考えながら慎重に解きたい。

$\boxed{1}$

(1) ある三角形の2辺の長さが2と3で、その面積が$\sqrt{5}$であるとき、残る1辺の長さは$\boxed{\text{ア}}$と$\boxed{\text{イ}}$の2通りがある。ただし$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$とする。

(2) $(xy+x+y+1)^5$のx^2y^4の係数は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(3) 4つのサイコロを同時にふるとき、出た目が連続する自然数になる確率は$\boxed{\text{エ}}$である。

(4) $\sqrt{n^2-15}$が整数となるような自然数nは$\boxed{\text{オ}}$と$\boxed{\text{カ}}$である。

ただし$\boxed{\text{オ}}<\boxed{\text{カ}}$とする。

(5) 対数の定義を用いて$\log_3 2$を小数で表したときの小数第1位の値は$\boxed{\text{キ}}$である。

$\boxed{2}$

aを実数とし、$x_1=2$，$y_1=2$

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+ay_n \\ y_{n+1}=2x_n+2ay_n-2 \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列$\{x_n\}$および$\{y_n\}$がある。

(1) 数列$\{x_n\}$および$\{y_n\}$の一般項は$x_n=\boxed{\text{ア}}$、$y_n=\boxed{\text{イ}}$である。

(2) 数列$\{x_n\}$および$\{y_n\}$が収束するようなaの範囲は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(3) aが(2)の範囲をとる。$a=\boxed{\text{エ}}$ならば、$\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{\text{オ}}$および$\lim_{n\to\infty}y_n=\boxed{\text{カ}}$であり、$a$の範囲が$\boxed{\text{キ}}$ならば、$\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{\text{ク}}$および$\lim_{n\to\infty}y_n=\boxed{\text{ケ}}$である。

$\boxed{3}$

xyz空間において、xy平面上に原点を中心とする半径a（$a>0$）の円をとる。次に、この円を下底面とし、高さπb（$b>0$）の直円柱を考える。この直円柱上に2点A（a, 0, 0）とB（a, 0, πb）をとり、点Pが点Aから点Bまで、直円柱の側面を直円柱の上から見て左回り（反時計回り）に、最短距離を移動する。

(1) 点Pが時刻$t=0$に点Aを出発し、一定の速さで進み、時刻$t=2\pi$に点Bに着いたとする。時刻tにおける点Pの座標を（$f(t)$，$g(t)$，$h(t)$）（$0\leqq t\leqq 2\pi$）とすると、$f(t)=\boxed{\text{ア}}$，$g(t)=\boxed{\text{イ}}$，$h(t)=\boxed{\text{ウ}}$である。

(2) 点Pの動いた距離が1となるように（a，b）が動くとき、$a+b$の最大値は$\boxed{\text{エ}}$である。

(3) (1)で求めたfを用いると$\int_0^x f(\sqrt{t})dt=\boxed{\text{オ}}$（$0\leqq x\leqq 4\pi^2$）である。

$\boxed{1}$

(1) 長さが2, 3である2辺のなす角をθとすると

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\theta = \sqrt{5} \qquad \therefore \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって、

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\frac{2}{3}$$

余弦定理より、もう1辺の長さをxとすると

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\left(\pm\frac{2}{3}\right) = 13 \mp 8$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{5}, \ \sqrt{21}$$

(2) $(xy + x + y + 1)^5 = \{(x+1)(y+1)\}^5 = (x+1)^5(y+1)^5$

より、$(x+1)^5$におけるx^2の係数と、$(y+1)^5$におけるy^4の係数をかければ良いから

$${}_5C_2\cdot 1^3 \times {}_5C_4\cdot 1^1 = 50$$

(3) サイコロの目の出方は

6^4通り

このうち、出た目が連続する自然数となるのは、目の組合せが

(1, 2, 3, 4)　(2, 3, 4, 5)　(3, 4, 5, 6)

の3通りで、それぞれどのサイコロにどの目を割り当てるかが

${}_4P_4$通り

よって、求める確率は

$$\frac{3\times {}_4P_4}{6^4} = \frac{1}{18}$$

(4) $\sqrt{n^2-15} = m$ (>0) とおくと、両辺平方して

$$n^2 - 15 = m^2 \qquad \therefore \quad (n-m)(n+m) = 15$$

ここで、$0 < n-m < n+m$であり、n, mともに自然数であるから

$(n-m,\ n+m) = (1,\ 15), (3,\ 5)$

$\therefore \quad (n,\ m) = (8,\ 7), (4,\ 1)$

ゆえに、$n = 4,\ 8$

(5) $\log_3 2 \Leftrightarrow 2 = 3^x$

$$2^{10} = (3^x)^{10} = 3^{10x}$$

$3^6 = 729 < 2^{10} = 1024 < 3^7 = 2187$ より

$$3^6 < 3^{10x} < 3^7$$

$$6 < 10x < 7$$

$$0.6 < x < 0.7$$

したがって小数第１位の数字は 6

$\boxed{2}$

(1) $x_{n+1} = x_n + ay_n \cdots$①、 $y_{n+1} = 2x_n + 2ay_n - 2 \cdots$② とおく。

②より、

$$y_{n+1} = 2(x_n + ay_n) - 2$$
$$= 2x_{n+1} - 2$$

$x_1 = 2$, $y_1 = 2$ より $y_1 = 2x_1 - 2$ であるから

$$y_n = 2x_n - 2 \cdots ③$$

③を①に代入して

$$x_{n+1} = x_n + a(2x_n - 2)$$
$$= (2a+1)x_n - 2a$$
$$x_{n+1} - 1 = (2a+1)(x_n - 1)$$

数列 $\{x_n - 1\}$ は公比 $2a+1$ の等比数列であるから

$$x_n - 1 = (2a+1)^{n-1}(x_1 - 1)$$

$$= (2a+1)^{n-1}$$

よって、

$$x_n = (2a+1)^{n-1} + 1$$

これを③に代入して

$$y_n = 2(2a+1)^{n-1}$$

(2) 収束条件は

$$-1 < 2a+1 \leqq 1$$

よって

$$-1 < a \leqq 0$$

(3) 極限値は

$a=0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = 2$$

$-1<a<0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$\boxed{3}$

(1) Pを z 軸の正方向から見ると、$x^2+y^2=a^2$ 上を動くので

$$f(t)=a\cos t,\quad g(t)=a\sin t$$

$h(t)$ は一定の速さで増加するので、$h(2\pi)=\pi b$ より

$$t:h(t)=2\pi:\pi b$$

$$\therefore\quad h(t)=\frac{bt}{2}$$

(2) 条件より、展開図におけるABが1だから

$$(2\pi a)^2+(\pi b)^2=1$$

これと $a>0$、$b>0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ …①をみたす θ を用いて

$$2\pi a=\cos\theta,\quad \pi b=\sin\theta$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{2\pi}\cos\theta,\quad b=\frac{1}{\pi}\sin\theta$$

と表せる。よって

$$a+b=\frac{\cos\theta+2\sin\theta}{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2\pi}\cos(\theta-\alpha)$$

(ただし α は $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ をみたす角)

①より $-\alpha<\theta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ だから、$a+b$ の最大値は $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(3) $f(t)=a\cos t$ より

$$\int_0^x f(\sqrt{t})dt = \int_0^x a\cos\sqrt{t}dt \cdots \text{（※）}$$

（※）において$\sqrt{t} = u$とおくと、$t = u^2$より、$dt = 2udu$だから

$$\text{（※）} = \int_0^{\sqrt{x}} a\cos u \cdot 2udu$$

$$= 2a[u\sin u]_0^{\sqrt{x}} - 2a\int^{\sqrt{x}0} \sin udu$$

$$= 2a(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} - 1)$$