# 2022　東京医科大学

*出題内容*

2017年度、2018年度は図示問題が、2019年度は記述式の証明問題が出題されたが、2020年度、2021年度は2016年度までと同じ全問が穴埋め形式のマークシート式であった。

微分積分は毎年何らかの形で出題されている。またベクトルや2次曲線の出題も多い。確率分野は過去10年ほど出題されていなかったが、2020年度で久々に出題されている。

問題は基本から標準レベルのものが中心であるが、年度によってはかなりの難問が出題されることもある。また時間のわりには問題量がやや多いので、正確かつ迅速な計算力を養っておきたい。

$\boxed{1}$

(1) 2つの放物線

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2 - \sin\theta \\ y = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2 + \sin\theta \end{cases} \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

が相異なる2点で交わるような$\theta$の範囲は$\boxed{\text{アイ}}^\circ < \theta < \boxed{\text{ウエオ}}^\circ$ である。

(2) 平面上の三角形OABは、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき、$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{2}$

をみたすとする。辺ABを1：2に内分する点をPとし、直線OPに関してAと対称な

点をQ、OQの延長とABの交点をRとおく。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{カ}}\vec{a} + \boxed{\text{キ}}\vec{b}$、

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{ク}}\vec{a} + \boxed{\text{ケ}}\vec{b}$ であり、$\triangle$PQRの面積は$\boxed{\text{コ}}$である。

$\boxed{2}$

一辺の長さが2の正方形ABCDがある。辺AB，辺BCの両方に接する円Pの半径を$r_1$（$0 < r_1 < 2$）とする。辺BC，辺CDの両方に接し、円Pに外接する円Qの半径を$r_2$とする。

(1) $r_1 = 1$のとき、$r_2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ となる。

(2) $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}$ は一定値$\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ をとる。

$\boxed{3}$

$\alpha$を$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$をみたす実数とする。直線$y = \sin\alpha$と曲線$y = \sin x$（$0 \leqq x \leqq 3\pi$）によって囲まれる図形の面積を$S(\alpha)$とおくと

$$S(\alpha) = \boxed{\text{ア}}\cos\alpha + (\boxed{\text{イ}}\alpha - \pi)\sin\alpha$$

となり、これから$S(\alpha)$は$\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$で極小かつ最小となり、最小値$\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$をとる。

$\boxed{4}$

$x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ならば、$x$，$y$，$z$のうち少なくとも1つは1に等しいことを証明せよ。

<解答>

$\boxed{1}$

(1) $2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2-\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2+\sin\theta$

$$2\sqrt{3}\left\{(x-\cos\theta)^2+(x+\cos\theta)^2\right\}=2\sin\theta$$

$$\sqrt{3}(x^2-2x\cos\theta+\cos^2\theta+x^2+2x\cos\theta+\cos^2\theta)=\sin\theta$$

$$2\sqrt{3}(x^2+\cos^2\theta)=\sin\theta$$

$$2\sqrt{3}x^2=\sin\theta-2\sqrt{3}\cos^2\theta \quad \cdots①$$

①が相異なる２実数解をもてば良いので、

$$\sin\theta-2\sqrt{3}\cos^2\theta>0$$

$$\sin\theta-2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)>0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta+\sin\theta-2\sqrt{3}>0$$

$$(2\sin\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\theta+2)>0$$

$$\therefore\quad \sin\theta<-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$0\leqq\sin\theta\leqq1$ だから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\leqq1$$

$\therefore\quad 60°<\theta<120°$　　$\boxed{\text{アイ}}\cdots60$　$\boxed{\text{ウエ}}\cdots120$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\vec{a}+m\vec{b}$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(l-1)\vec{a}+m\vec{b}$

対称の性質から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1\Leftrightarrow l^2\left|\vec{a}\right|^2+2lm\vec{a}\cdot\vec{b}+m^2\left|\vec{b}\right|^2=l^2+lm+2m^2=1 \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left((l-1)\vec{a}+m\vec{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5l+6m-5=0 \quad \cdots②$$

②より、①に代入して $m$ を消去すると

$$l^2+\frac{5}{6}l(1-l)+\frac{25}{18}(1-l)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (4l-1)(l-1)=0$$

$$\Leftrightarrow l=\frac{1}{4},\ 1$$

$l=\frac{1}{4}$のとき、$m=\frac{5}{8}$

$l=1$のとき、$m=0$となり不適。

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\underline{\frac{1}{4}}\vec{a}+\underline{\frac{5}{8}}\vec{b}$　$\boxed{\text{カ}}\cdots\frac{1}{4}$, $\boxed{\text{キ}}\cdots\frac{5}{8}$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{7}{8}\cdot\frac{2\vec{a}+5\vec{b}}{7}=\frac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\underline{\frac{2}{7}}\vec{a}+\underline{\frac{5}{7}}\vec{b}\quad \boxed{\text{ク}}\cdots\frac{2}{7},\ \boxed{\text{ケ}}\cdots\frac{5}{7}$$

AP : PB=1 : 2, AR : RB=5 : 2 より、AP : PR : RB=7 : 8 : 6

また、OQ : QR=7 : 1 より

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{OR}}\cdot\triangle \mathrm{OAB}$$

$$=\frac{8}{21}\cdot\frac{1}{8}\cdot\triangle \mathrm{OAB}$$

$$=\frac{8}{21}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

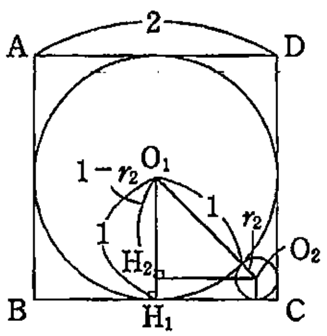
$$=\frac{8}{21}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{1}{4}}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{7}}{84}}\quad \boxed{\text{コ}}\cdots\frac{\sqrt{7}}{84}$$

$\boxed{2}$

(1) 円P, Qの中心をそれぞれ$\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$とし、$\mathrm{O_1}$から辺BCへ下ろした垂線の足を$\mathrm{H_1}$、$\mathrm{O_2}$から$\mathrm{O_1H_1}$へ下ろした垂線の足を$\mathrm{H_2}$とする。

このとき、三角形$\mathrm{O_1H_2O_2}$は$\mathrm{O_1H_2}=\mathrm{O_2H_2}$の直角三角形である。



P，Q は外接しているから

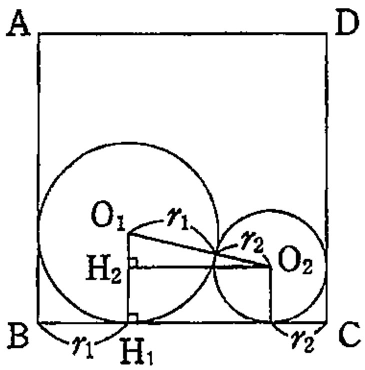
$$O_1O_2=1+r_2$$

また、$O_1H_2=1-r_2$ であるから

$$1+r_2=\sqrt{2}(1-r_2)$$

$$r_2=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$$ $\boxed{\text{ア}}$…3, $\boxed{\text{イ}}$…2, $\boxed{\text{ウ}}$…2

(2) 図の直角三角形 $O_1O_2H_2$ において




$$O_1O_2=r_1+r_2$$

$O_1H_2=|r_1-r_2|$ （図は $r_1>r_2$ だが $r_1\leqq r_2$ の場合もあるため $|r_1-r_2|$ と表す）

$$H_2O_2=2-r_1-r_2$$

よって、三平方の定理により

$$(r_1+r_2)^2=|r_1-r_2|^2+(2-r_1-r_2)^2$$

$$4r_1r_2=(2-r_1-r_2)^2$$

$$\pm2\sqrt{r_1r_2}=2-r_1-r_2$$

$$r_1\pm2\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}+r_2=2$$

$$(\sqrt{r_1}\pm\sqrt{r_2})^2=2$$

ここで、$0<r_1<2$，$0<r_2<2$ より、

$$0<\sqrt{r_1}<\sqrt{2},\ 0<\sqrt{r_2}<\sqrt{2}$$

であるから、$(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2})^2=2$ はあり得ない。

よって、$(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2=2$ より

$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}=\sqrt{2}$ （一定）　　$\boxed{\text{エ}}\cdots 2$

$\boxed{3}$

直線 $y=\sin\alpha\left(0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=\sin x$ （$0<x<\pi$）との交点の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta$ （$\alpha<\beta$）とすると

$$\beta=\pi-\alpha$$

また題意の図形は $x=\dfrac{3}{2}\pi$ に関して対称だから、求める面積 $S(\alpha)$ は

$$S(\alpha)=2\left\{\int_\alpha^\beta(\sin x-\sin\alpha)dx+\int_\beta^{\frac{3}{2}\pi}(\sin\alpha-\sin x)dx\right\}$$

$$=2\left\{\left[\cos x+x\sin\alpha\right]_\beta^\alpha+\left[\cos x+x\sin\alpha\right]_\beta^{\frac{3}{2}\pi}\right\}$$

$$=2\left\{\cos\alpha+\alpha\sin\alpha+\frac{3}{2}\pi\sin\alpha-2(\cos\beta+\beta\sin\alpha)\right\}$$

$$=6\cos\alpha+(6\alpha-\pi)\sin\alpha$$

$\boxed{\text{ア}}\cdots 6$, $\boxed{\text{イ}}\cdots 6$

これから、

$$S'(\alpha)=-6\sin\alpha+6\sin\alpha+(6\alpha-\pi)\cos\alpha$$

$$=(6\alpha-\pi)\cos\alpha\quad\left(0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

よって、$S(\alpha)$ は $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ で極小かつ最小となり　　$\boxed{\text{ウ}}\cdots 6$

最小値 $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$　　$\boxed{\text{エ}}\cdots 3$, $\boxed{\text{オ}}\cdots 3$

$\boxed{4}$

与えられた条件は

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 & \cdots ② \end{cases}$$

と表せる。②は両辺に $xyz$ をかけると

$$xy+yz+zx=xyz \quad \cdots ②'$$

となる。

$(x-1)(y-1)(z-1)$ は、①と②′ のもとでは

$$\begin{aligned} &(x-1)(y-1)(z-1) \\ &=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1 \\ &=xyz-xyz+1-1 \\ &=0 \end{aligned}$$

となる。

よって、$x-1=0$ または $y-1=0$ または $z-1=0$

すなわち、$x$, $y$, $z$ のうち少なくとも 1 つは 1 に等しい。