医学部専門予備校　クエスト　解答速報

杏林大学医学部　数学　試験日1月20日（金）

$\boxed{\text{I}}$ (1) P_2を求める。

赤→赤の順に取り出す確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$

黒→赤の順に取り出す確率は，$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

したがって，$P_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{3}}$

同様に，P_3を求める。

赤→赤→赤 … $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$

赤→黒→赤 … $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

黒→赤→赤 … $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

黒→黒→赤 … $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

したがって，$P_3=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\underline{\frac{1}{3}}$

(2) P_2を求める。

赤→赤 … $\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$

黒→赤 … $\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{15}$

したがって，$P_2=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\underline{\frac{17}{30}}$

P_3を求める。

赤→赤→赤 … $\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{70}$

赤→黒→赤 … $\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{35}$

黒→赤→赤 … $\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{16}{105}$

黒→黒→赤 … $\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{21}$

したがって，$P_3=\frac{9}{70}+\frac{6}{35}+\frac{16}{105}+\frac{2}{21}=\underline{\frac{23}{42}}$

$M_n = n+4$　　$R_n = M_n \times P_n = (n+4)P_n$ とすると、

n回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ、

試行後の赤玉の個数が試行前と比べて 1 個増えるため、

$R_{n+1} = R_n + (1-P_n)\times 1$ となる.

定義より、$R_{n+1} = M_{n+1}\times P_{n+1} = (n+5)P_{n+1}$ であるから、

$(n+5)P_{n+1} = (n+4)P_n + (1-P_n)$

$\iff (n+5)P_{n+1} = (n+3)P_n + 1$

$\iff P_{n+1} = \frac{n+3}{n+5}P_n + \frac{1}{n+5}$

$(n+5)P_{n+1} = (n+3)P_n + 1$ の両辺に $(n+4)$ をかけると、

$(n+4)(n+5)P_{n+1} = (n+3)(n+4)P_n + (n+4)$

$(n+3)(n+4)P_n = Q_n$ とおくと、

$Q_{n+1} = Q_n + (n+4)$

$Q_n = Q_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+4)$

$\left(P_1 = \frac{3}{5}\right.$ より、$\left.Q_1 = 4\times 5\times \frac{3}{5} = 12\right)$

$= 12 + \frac{1}{2}\times(n+8)\times(n-1)$

$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 8$

したがって、$P_n = \frac{Q_n}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+7n+16}{2(n+3)(n+4)} = \frac{(n+3)(n+4)+4}{2(n+3)(n+4)}$

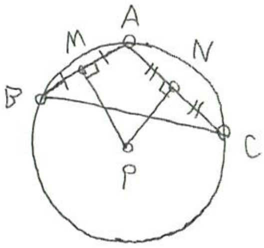
$= \frac{1}{2} + \frac{2}{(n+3)(n+4)}$ より、

$(n+3)(n+4)\left(P_n - \frac{1}{2}\right) = 2$ で一定であり、$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$

III　$A(-1, 0, -2)$　$B(-2, -2, -3)$　$C(1, 2, -2)$

(a)　$\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -1)$，$\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$ より、

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$，$|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{-6}$



$\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ とおく．左図より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2} = 3 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6b - 6c = 3 \\ -6b + 8c = 4 \end{cases}$$ より、$(b, c) = \left(4, \dfrac{7}{2}\right)$

したがって、$\overrightarrow{AP} = \underline{4\overrightarrow{AB} + \dfrac{7}{2}\overrightarrow{AC}}$

$|\overrightarrow{AP}|^2 = 16|\overrightarrow{AB}|^2 + 28\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \dfrac{49}{4}|\overrightarrow{AC}|^2$

$= 96 - 168 + 98 = 26$

したがって、$|\overrightarrow{AP}| = \underline{\sqrt{26}}$

(b)　$\overrightarrow{OG} = \underline{\dfrac{1}{3}}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -2\right)$ より、

$\overrightarrow{AQ} = \underline{\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, 0\right)}$

(c)　Sが3点A，Q，Rを通る平面α上にあるとき、

$\overrightarrow{OS} = t\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OB} + v\overrightarrow{OC}$

$= t\overrightarrow{OA} + u \cdot \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OQ} + v \cdot \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OR}$

$= t\overrightarrow{OA} + \dfrac{3}{2}u\overrightarrow{OQ} + \dfrac{3}{2}v\overrightarrow{OR}$ とおくと、

$\underline{t + \dfrac{3}{2}u + \dfrac{3}{2}v = 1}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OR}$$

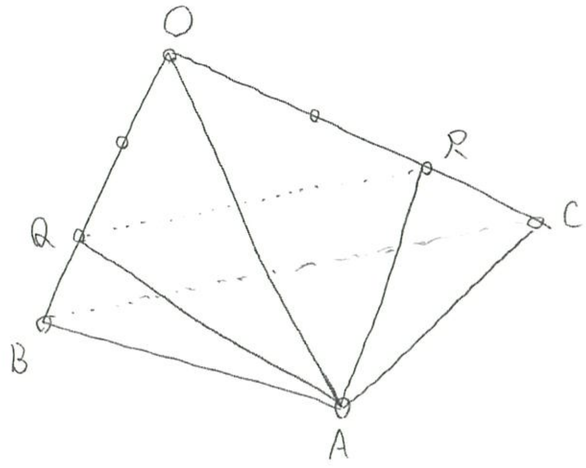
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OR}\right)$$

$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OR}$ とおくと，S は α 上に存在する.

したがって，$\overrightarrow{OG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OS} \iff \overrightarrow{OS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$

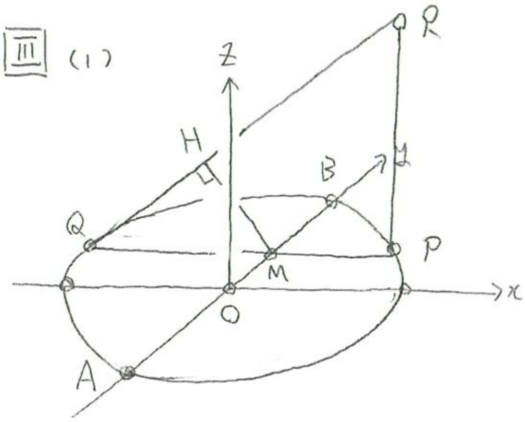
$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AR}$ より、S は △AQR の内部に存在する。

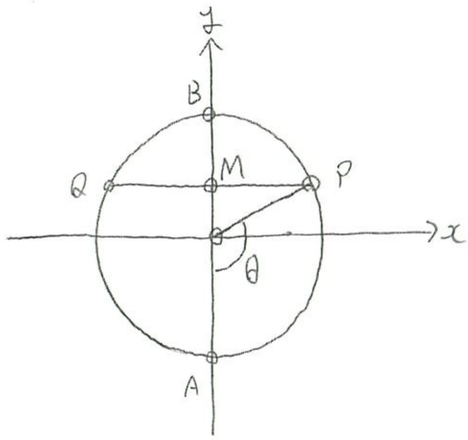


上図より、四面体 OAQR の体積は、四面体 OABC の体積の

$\frac{1}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 倍である.

三 (1)



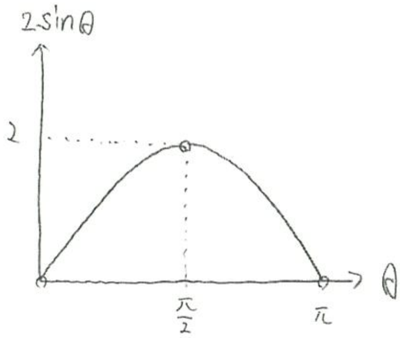


$0 \leqq \theta \leqq \pi$

Vの側面の展開図を考える。

$P\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$ より、$P(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$

したがって、$\overset{\frown}{AP}=\theta$, $PR=2\sin\theta$



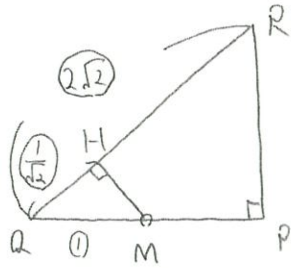
線分PRの通過領域の展開図は左図であり、その面積は、$\int_0^{\pi} 2\sin\theta\, d\theta = \left[-2\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4$

$QH : QR = \frac{1}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{2} = 1 : 4$ より、

Hは線分QRを $1:3$ に内分する

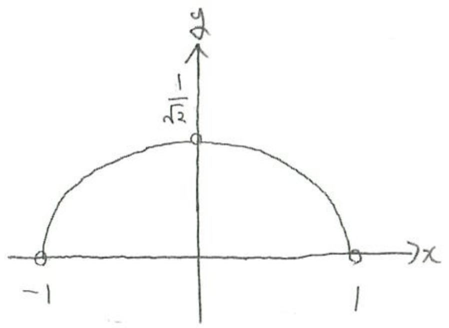
$OM = |\cos\theta|$

$MH = \frac{1}{4}QR = \frac{\sqrt{2}}{4}PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$



したがって、

$2 \times (MH)^2 + (OM)^2 = 1$ が成立する。



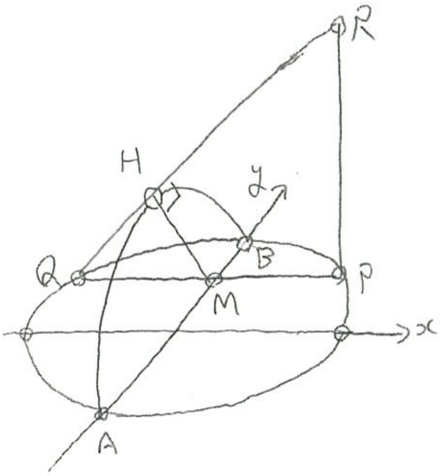
したがって、線分MHの通過領域の概形は、

OM = |X|, MH = Y とすると、

$2Y^2+X^2=1 \Leftrightarrow X^2+\dfrac{Y^2}{\frac{1}{2}}=1$

となることから、左図のようになり、

その面積は、$\pi\times1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$



点Hの軌跡は左図のようになり、

これが線分QRが通過してできる

曲面上において2点A, Bを結ぶ

最も短い曲線である。

線分PQを直径とするxz平面に平行な円の通過領域は

半径が1の球であり、その体積は、$\dfrac{4}{3}\pi$ である。

線分PQを直径とする円の面積は $\pi\sin^2\theta$

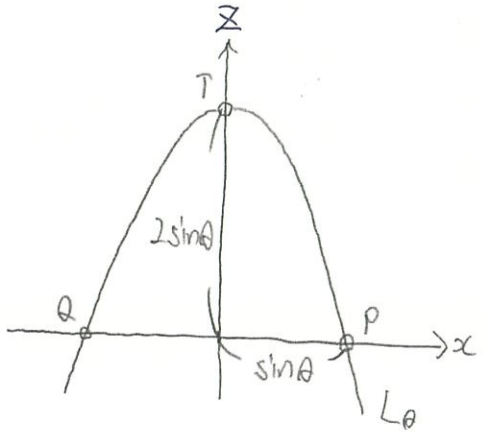
$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\sin\theta=2\sin^2\theta$ より、

△PQR は円の面積の $\dfrac{2}{\pi}$ 倍である

体積は断面積に比例するので、

立体Vの体積 $=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{8}{3}$

(2) $y=-\cos\theta$



$L_\theta\begin{cases} y=-\cos\theta \\ z=-\dfrac{2}{\sin\theta}x^2+2\sin\theta \end{cases}$

$P(1,0,0)$であるとき、$\theta=\frac{\pi}{2}$であり、

このとき、$L_{\frac{\pi}{2}}\begin{cases} y=0 \\ z=-2x^2+2 \end{cases}$

L_θと線分PQによって囲まれる図形の面積$S(\theta)$は、

$S(\theta)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{\sin\theta}\cdot(2\sin\theta)^3=\dfrac{8}{3}\sin^2\theta$

したがって、$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{8}{3}$

$S(\theta)$は線分PQを直径とするxz平面に平行な円の面積の$\dfrac{8}{3\pi}$倍である。体積は断面積に比例するので、

Lと線分PQによって囲まれる図形の通過領域の体積は、

$\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{8}{3\pi}=\dfrac{32}{9}$