医学部専門予備校　クエスト　解答速報

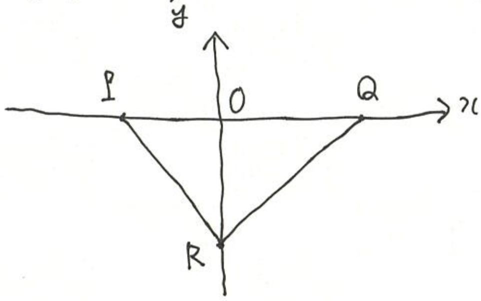
日本医科大学　数学　　試験日2月2日（木）

[I]　a, b は1以上6以下の整数であり、$a>0, b>0$ であるから

$y=f_k(x)$ は下に凸な放物線で y 切片 $f_k(0)=-\frac{b}{2}<0$ を満たす。

よって、x 軸と異なる2つの交点をもち、方程式 $f_k(x)=0$ の2解を

$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ として $P(\alpha, 0), Q(\beta, 0), R\left(0, -\frac{b}{2}\right)$ とおくことができる。



このとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \dfrac{2(k-a-b)}{a} & \text{——①} \\ \alpha\beta = -\dfrac{b}{a} & \text{——②} \end{cases}$$

よって、$\alpha\beta<0$ となるので $\alpha<0<\beta$ となる。

問1．$\triangle PQR$ が直角三角形となるとき、$\angle PRQ$ が直角となり、

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$ が成立する。$\overrightarrow{RP}=\left(\alpha, \frac{b}{2}\right)$，$\overrightarrow{RQ}=\left(\beta, \frac{b}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\alpha\beta+\frac{b^2}{4}\underset{\text{②より}}{=}-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4}=\frac{b(ab-4)}{4a}=0$$ であるから、

$ab=4$ となり、a, b は1以上6以下の整数より

$(a, b)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ と定まる。

よって、k の値によらず $P_0(k)=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$ （答）

問2．$\triangle PQR$ が直角二等辺三角形となるとき、問1の条件に加えて

$|\overrightarrow{RP}|=|\overrightarrow{RQ}|$ が成立するので、$\sqrt{\alpha^2+\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\beta^2+\frac{b^2}{4}}$ より $\alpha^2=\beta^2$ を得る。

ここで、$\alpha<0<\beta$ であったから $\beta=-\alpha$ すなわち $\alpha+\beta=0$ となる。

よって、①より $k=a+b$ を得る。

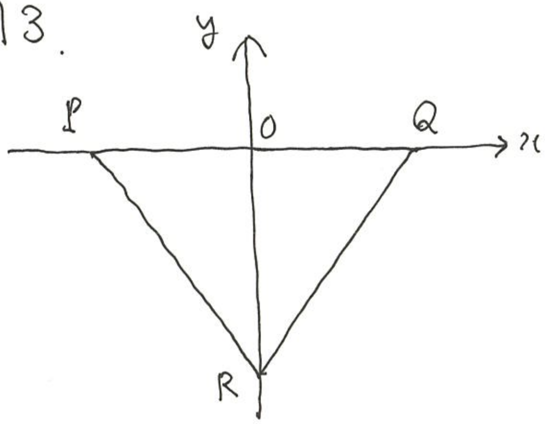
よって $(a,b)=(1,4),(2,2),(4,1)$ より $k=a+b$ の値は

$k=4$，または 5 となる．（答）

$k=4$ のとき $(2,2)$ の 1 通りより $P_1(4)=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$（答）

$k=5$ のとき $(1,4),(4,1)$ の 2 通りより $P_1(5)=\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$（答）

問3．



$\triangle PQR$ が正三角形となるとき．

$|\overrightarrow{RP}|=|\overrightarrow{RQ}|$ より問2と同様にして

$\beta=-\alpha$ で $k=a+b$ が成立する．

このとき $f_k(x)=\dfrac{a}{2}x^2-\dfrac{b}{2}=0$ の

2解より $\alpha=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，$\beta=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ となり．

$OP=OQ=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，$OR=\dfrac{b}{2}$ が成立する．

よって $OR=\sqrt{3}\,OP$ より $\dfrac{b}{2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ となり，$\dfrac{b^2}{4}=\dfrac{3b}{a}$ を得る．

これより $ab=12$ となるので．

$(a,b)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)$

したがって．$k=a+b$ の値は

$k=7$，または 8 となる．（答）

それぞれ2通りずつの場合があるので．

$P_2(7)=\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$（答）

$P_2(8)=\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$（答）

[II] 問1．kを実数の定数とし、方程式

$$x^2+y^2+(z-2)^2-1+k\{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-5\}=0$$

で表される図形は、S_1とS_2のすべての共有点を含む。

ここで、$k=-1$とすると、この方程式は$x+2y+z-3=0$となり

平面を表す。よって、Eを含む平面πの方程式は、

$$\pi : x+2y+z-3=0 \quad (\text{答})$$

（注）S_1とS_2の中心間距離をd，半径をそれぞれr_1, r_2とすると、

$d=\sqrt{6}$，$r_1=1$，$r_2=\sqrt{5}$となり．$r_2-r_1<d<r_1+r_2$が

成り立つので．S_1とS_2の交わりの図形Eは．

S_1（またはS_2）と平面πの交わりの円となる．

問2．平面πとxy平面（$z=0$）の交線より．

$$l : x+2y-3=0 \quad (\text{答})$$

問3．lをy軸に関して対称移動すると$(-x)+2y-3=0$より

$$m : x-2y+3=0 \quad (\text{答})$$

問4．$A\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$B(-3,0)$，$C(3,0)$であり．$\triangle ABC$の面積は．

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

ここで、問1の（注）より，図形E上の点が満たす方程式として．

$$E : \begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2=1 & \text{——①} \\ x+2y+z-3=0 & \text{——②} \end{cases}$$

をとることができる．

点$P(x,y,z)$がE上を動くとき、$\triangle ABC$はxy平面上より、高さ$|z|$として、

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot|z|=\frac{3}{2}|z|$$

となるので、zのとりうる値の範囲を求める。

② より $x=-2y-z+3$ を ①に代入して,

$$(-2y-z+3)^2+y^2+(z-2)^2=1$$

これを展開して y について整理すると,

$$5y^2+4(z-3)y+2z^2-10z+12=0 \quad —③$$

③の判別式を D とすると、実数解条件より,

$$D/4=4(z-3)^2-5(2z^2-10z+12)=-6z^2+26z-24$$

$$=-2(3z-4)(z-3)\geqq 0$$

よって、$\dfrac{4}{3}\leqq z\leqq 3$

(逆に、この範囲の z に対して、③より実数 y が定まり、$x=-2y-z+3$ で x を定めると、その (x, y, z) は ①かつ②を満たす。)

これより、$V=\dfrac{3}{2}|z|$ を最小とする z は $z=\dfrac{4}{3}$ であり,

V の最小値は $V_{min}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=2$ (答)

$z=\dfrac{4}{3}$ のとき ③は重解 $y=-\dfrac{2(z-3)}{5}=\dfrac{2}{3}$ をもち,

$x=-2y-z+3=-2\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}+3=\dfrac{1}{3}$ である。

よって、V を最小とする点 P の座標は,

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad (答)$$

[Ⅲ] 問1. $\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開式の一般項は、

$$\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^p\left(\frac{3}{2}x\right)^q=\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\left(\frac{3}{2}\right)^{p+q}x^{2p+q}$$

ただし、 $p+q+r=n+2$ かつ $p\geqq 0$ かつ $q\geqq 0$ かつ $r\geqq 0$

$2p+q=3$ のとき、

$(p,q,r)=(0,3,n-1),\ (1,1,n)$

となるので、x^3 の係数は、

$$A_n=\frac{(n+2)!}{0!3!(n-1)!}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{(n+2)!}{1!1!n!}\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}(n+2)(n+1)n+\frac{9}{4}(n+2)(n+1)$$

$$=\frac{9}{16}(n+1)(n+2)(n+4) \qquad (答)$$

問2.
$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{16}(k+1)(k+2)(k+4)$$

$$=\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)(k+2)+4(k+1)(k+2)\right\}$$

$$=\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\left\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\left\{(k+1)(k+2)(k+3)-k(k+1)(k+2)\right\}\right]$$

$$=\frac{9}{64}\left\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0\cdot1\cdot2\cdot3\right\}$$
$$+\frac{3}{4}\left\{(n+1)(n+2)(n+3)-1\cdot2\cdot3\right\}$$

$$=\frac{9}{64}n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{3}{4}(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{9}{2}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{9}{64}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)+\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{n^4}\right\}$$

$$=\frac{9}{64} \qquad (答)$$

問3. $\frac{9}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+4)-1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}$$

$$=\frac{5}{72}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$

よって. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{9}\left\{\frac{5}{72}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}$

$$=\frac{10}{81}\quad(答)$$

問4. $a_n=n+1$, $b_n=n+2$, $c_n=n+4$ より $a_n+b_n+c_n=3n+7$

極限をとる式は正の値をとるので. 自然対数をとって.

$$\log\left[\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]=\log\left\{\frac{1}{n^{2n}}\cdot\frac{(3n+7)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{1}{n^{2n}}\cdot(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(3n+7)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+3}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2n}{n}\cdot(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+7)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{2n}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\log(3n+1)+\log(3n+2)+\cdots+\log(3n+7)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{7}\log(3n+k)$$

よって.

$$\lim_{n\to\infty}\log\left[\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{7}\left(3+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{\log(3n+k)}{3n+k}\right\}$$

$$=\int_0^2\log(1+x)\,dx+0\quad\left(\because\ \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\ より\right)$$

$$=\Big[(x+1)\log(x+1)-(x+1)\Big]_0^2=3\log3-2=\log\frac{27}{e^2}$$

ここで. 自然対数の連続性より. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{e^2}$ (答)

[Ⅳ] 問1. $y=x^2$ のとき $y'=2x$ より，接線 l の方程式は $y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore\ l : y=2tx-t^2$ （答）

直線 $x=1$ との交点Qは，$y=2t\cdot 1-t^2=2t-t^2$ より $Q(1,2t-t^2,0)$ （答）

問2．$(a,b,0)$ が線分PQ上の点より，実数 s を用いて，

$$(a,b,0)=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=\left((1-t)s+t,\ 2(t-t^2)s+t^2\right)\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

と表されるから，
$$\begin{cases}(1-t)s+t=a & \text{—①}\\ 2(t-t^2)s+t^2=b & \text{—②}\end{cases}$$

①×2t−② より $t^2=2at-b$ $\quad\therefore\ t^2-2at+b=0$

よって，$t=a\pm\sqrt{a^2-b}$ （$0<b\leqq a^2$ より $a^2-b\geqq 0$ なので実数解となる．）

(i) $t=a+\sqrt{a^2-b}$ のとき，①より $s=\dfrac{a-t}{1-t}$ より

$$s=\frac{-\sqrt{a^2-b}}{1-a-\sqrt{a^2-b}}$$ となり，$s>0$ とすると $1-a-\sqrt{a^2-b}<0$

一方で，$1-s=\dfrac{1-a}{1-a-\sqrt{a^2-b}}$ となり，$1-a>0$ かつ $1-s\geqq 0$ より

$1-a-\sqrt{a^2-b}>0$ となるから矛盾する．

$s=0$ とすると，$t=a$ かつ $b=a^2$ で (ii) と一致（重解）

(ii) $t=a-\sqrt{a^2-b}$ のとき，$s=\dfrac{a-t}{1-t}$ より

$$s=\frac{\sqrt{a^2-b}}{1-a+\sqrt{a^2-b}}$$ となり，$1-a>0$ より $0\leqq s<1$ を満たす

（$s=0$ は $b=a^2$ のとき成立）

また，$0\leqq\sqrt{a^2-b}<\sqrt{a^2}=|a|=a$ より

$0<a-\sqrt{a^2-b}\leqq a<1$ となり $0<t<1$ を満たす．

以上 (i), (ii) より

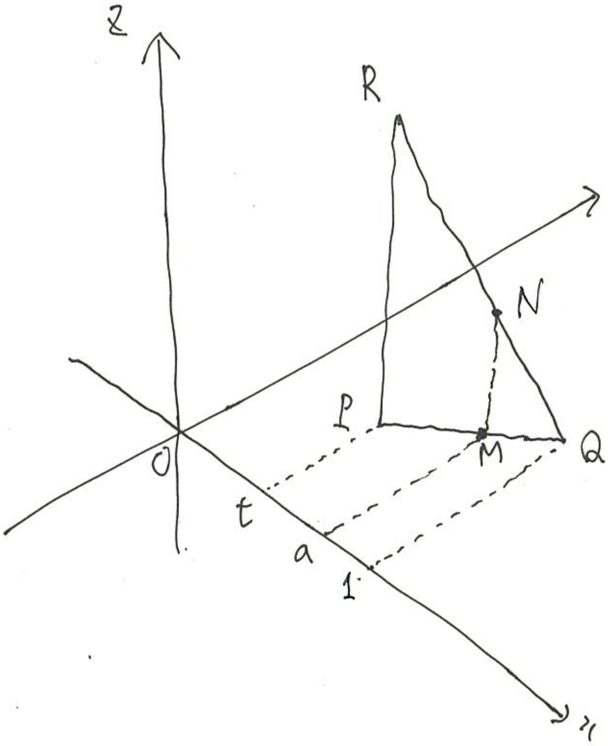
$$t_{a,b}=a-\sqrt{a^2-b}\quad（答）$$

問3．$0<a<1$ の場合．$0<y\leqq a^2$ を満たす y に対して，

点 $M(a, y, 0)$ が線分 PQ 上にあるような t の値は，問2より

$$t=t_{a,y}=a-\sqrt{a^2-y}$$

このとき，線分 QR と平面 $x=a$ の交点を N とおくと，



$MN:PR=(1-a):(1-t)$ より

$$MN=\frac{1-a}{1-t}PR$$
$$=\frac{1-a}{1-t}\cdot(t-t^2)$$
$$=(1-a)t$$
$$=(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})$$

よって，線分MN上の z の範囲は，

$$0\leqq z\leqq(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})$$

（$a=0$ のとき，$x=0, y=0, z=0$
$a=1$ のとき，$x=1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ z=0$
となり成立する．）

よって，$x=a,\ 0\leqq y\leqq a^2,\ 0\leqq z\leqq(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})$ （答）

問4．$S(a)=\int_0^{a^2}(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})\,dy=(1-a)\left[ay+\frac{2}{3}(a^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}$

$=(1-a)\left\{(a^3+0)-(0+\frac{2}{3}a^3)\right\}=\frac{1}{3}a^3(1-a)$ （答）

問5．$V=\int_0^1 S(a)\,da=\int_0^1\frac{1}{3}a^3(1-a)\,da=\frac{1}{3}\left[\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}\right]_0^1$

$=\frac{1}{60}$ （答）