医学部専門予備校　クエスト　解答速報

順天堂大学（医）　数学　試験日 2 月 3 日（金）

Ⅰ (1) (a) $w = z^2 = \left(\frac{3}{8}+yi\right)^2 = \left(\frac{9}{64}-y^2\right)+\frac{3}{4}yi$

$u=\frac{9}{64}-y^2$, $v=\frac{3}{4}y$ より $u=\frac{9}{64}-\frac{16}{9}v^2$ …(答)

$v=0$ のとき $u=\frac{9}{64}$ より w は実軸と $\frac{9}{64}$ …(答) で交わる.

$u=0$ のとき $v^2=\frac{9^2}{64\cdot 16}$ より w は虚軸と $\pm\frac{9}{32}i$ …(答) で交わる.

(b) $w=\frac{1}{z}$ より $u=\frac{x}{x^2+4}$, $v=\frac{-2}{x^2+4}$

$u^2+v^2=\frac{1}{x^2+\boxed{4}}$ …(答) であり, $\frac{1}{x^2+4}=-\frac{v}{2}$ だから

$u^2+v^2=-\frac{v}{2} \iff u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ …(答)

w は $-\frac{1}{4}i$ …(答) を中心とする半径 $\frac{1}{4}$ …(答) の円を描く.

ただし $v\neq 0$ であり, $v=0$ のとき $u=0$ となるから 点 O …(答)

を除く.

(2) 成分計算して $x_1=2x_2+1$, $y_1=2y_2+1$ …(答)

P が l_1 上を動くとき $y_1=x_1^3-3x_1$ を満たすから

$2y_2+1=(2x_2+1)^3-3(2x_2+1)$

$\iff y_2=4x_2^3+6x_2^2-\frac{3}{2}$

$a=4$, $b=6$, $c=0$, $d=\frac{-3}{2}$ …(答)

l_1 と l_3 は相似比 $2:1$ …(答) であり, B(a, b) とおくと,

Q が l_3 上のとき $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BP}$ より $x_1=\frac{1}{2}(x_2+a)$, $y_1=\frac{1}{2}(y_2+a)$

$y_1=x_1^3-3x_1$ に代入して

$y_2=\frac{1}{4}x_2^3+\frac{3}{4}ax_2^2+\left(\frac{3}{4}a^2-3\right)x_2+\frac{1}{4}a^3-3a-b$

よって $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}=\frac{9}{4}$, B$(1, 0)$ …(答)

(3) (a) $S_n=\frac{5}{9}\left\{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right\}<\frac{1}{2} \iff \frac{1}{10}<\left(-\frac{4}{5}\right)^n$

これを満たすnは偶数で、このとき $\frac{1}{10}<\left(\frac{4}{5}\right)^n$

より $-1<n(3\log_{10}2-1)$ ∴ $n<\frac{1}{1-3\log_{10}2}$

$\log_{10}2=0.3010$を用いて、$n<10.3\cdots$

よって nの最大値は 10 …(答)

(b) $a_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_2=\frac{3}{4}$, $a_3=0$, $a_4=\frac{9}{16}$, $a_5=-\frac{9\sqrt{3}}{32}$, $a_6=0$

より $\sum_{n=1}^{6}a_n=\frac{7\sqrt{3}+42}{32}$ …(答)

$\sin\left(\frac{2}{3}(n+6)\pi\right)=\sin\left(\frac{2}{3}n\pi+4\pi\right)=\sin\frac{2}{3}n\pi$ であり、

$a_{n+6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6a_n$ だから、収束することを前提として

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は 初項 $\sum_{n=1}^{6}a_n$，公比$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$の無限等比級数

となり $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{7\sqrt{3}+42}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{27}{64}}=\frac{7\sqrt{3}+42}{32}\cdot\frac{64}{37}$

$=\frac{14\sqrt{3}+84}{37}$ …(答)

Ⅱ (a) $OA=2$ より $\triangle OAB$は1辺2…(答)の正三角形.

直線OAはkを実数として $(x,y,z)=k\left(\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$と表される

から $\frac{\sqrt{3}}{2}k=t \iff k=\frac{2}{\sqrt{3}}t$ のとき $z=t$ とOAの交点Pは

$P\left(2t,\frac{\sqrt{3}}{3}t,t\right)$ …(答)

直線ABはkを実数として $(x,y,z)=\left(\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+k\left(0,-1,-\sqrt{3}\right)$

と表されるから、$\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}k=t \iff k=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}t$ のとき、$z=t$と

ABの交点Qは $Q\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3}t,t\right)$ …(答)

直線OBと$z=t$の交点Rも同様にして $R\left(-2t,\frac{\sqrt{3}}{3}t,t\right)$

であり、$S(0,0,t)$として

$SP=SR=\sqrt{\dfrac{13}{3}t^2}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}|t|$，$SQ=\sqrt{3+\dfrac{1}{3}t^2}$ だから

V の $z=t$ による切り口は半径 $\dfrac{\sqrt{39}}{3}|t|$ と $\sqrt{3+\dfrac{1}{3}t^2}$ …(答)

の同心円で囲まれた部分となる．よって，切り口の面積は，

$\left(\left(\sqrt{3+\frac{1}{3}t^2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{39}}{3}|t|\right)^2\right)\pi=(3-4t^2)\pi$ …(答) となり，

V の体積は $2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(3-4t^2)dt=2\sqrt{3}\pi$ …(答)

(6) $\triangle OAB$ は正三角形だから外接円の中心は重心に一致し，$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$ …(答)

半径 R は $2R=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}$ より $R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ …(答)

この円が平面 $z=ay$ 上にあるとすると，A もこの平面上にあるから，$a=\sqrt{3}$　$\therefore z=\sqrt{3}y$ …(答)

点 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{t}{\sqrt{3}},t\right)$ が円板内にある条件を考えて，

$$\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+t^2\leqq\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\quad\therefore -1\leqq t\leqq 1\ \cdots(答)$$

交点を $\left(x,\dfrac{\sqrt{3}}{3}t,t\right)$ とおくと

$$\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{3}t^2+t^2=\frac{4}{3}$$

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right)$$

より交点は $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right),\dfrac{\sqrt{3}}{3}t,t\right)$ …(答)

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right)\geqq 0$ より円板を z 軸の周りに1回転したときの切り口は

$$\pi\left\{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2\right\}-\pi\left\{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2\right\}$$

$$=\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{1-t^2}=\frac{8}{3}\pi\sqrt{1-t^2}$$

求める体積は $\dfrac{8}{3}\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\dfrac{8}{3}\pi\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4}{3}\pi^2$ …(答)

Ⅲ (1) 割り算を実行して

商 $s^2+st+2t^2$, 余り $2t^3$ …(答)

(2) (Ⅰ) $n=1$ のとき

$P(s,t)=f_1(t)s+f_0(t)$

$=f_1(t)(s-t)+f_0(t)+tf_1(t)$

より $Q(s,t)=f_1(t)$, $R(t)=f_0(t)+tf_1(t)$ とおけ.

$P(s,t)=Q(s,t)(s-t)+R(t)$

と表せる.

(Ⅱ) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると.

$P_k(s,t)=f_k(t)s^k+f_{k-1}(t)s^{k-1}+\cdots+f_1(t)s+f_0(t)$

$(s-t)$ で割ったときの商を $Q_k(s,t)$, 余りを $R_k(t)$ とおき直すと.

$P_k(s,t)=Q_k(s,t)(s-t)+R_k(t)$

このとき

$P_{k+1}(s,t)=f_{k+1}(t)s^{k+1}+P_k(s,t)$

$=f_{k+1}(t)s^{k+1}+Q_k(s,t)(s-t)+R_k(t)$

s^{k+1} を $(s-t)$ で割ったときの商を $A_k(s,t)$,

余りは t だけの整式となるから $B_k(t)$ とおくと

$P_{k+1}(s,t)=f_{k+1}(t)\left(A_k(s,t)(s-t)+B_k(t)\right)$

$+Q_k(s,t)(s-t)+R_k(t)$

$Q_{k+1}(s,t)=f_{k+1}(t)A_k(s,t)+Q_k(s,t)$

$R_{k+1}(t)=f_{k+1}(t)B_k(t)+R_k(t)$

とおくと. $P_{k+1}(s,t)=Q_{k+1}(s,t)(s-t)+R_{k+1}(t)$

より $n=k+1$ のときも成り立つ.

(Ⅰ)(Ⅱ)より 題意は示された. ■

(3) $P(x,y)=-P(y,x)$ に $x=y=t$ を代入すると

$$P(t,t)=-P(t,t) \quad \therefore P(t,t)=0$$

(2)より

$$P(t,t)=Q(t,t)(t-t)+R(t)$$

だから $R(t)=0$ 　∴ $P(s,t)=Q(s,t)(s-t)$

よって $s-t$ は $P(s,t)$ の因数である。■

(4) $P(x,y)=(x-y)(x+2y)$

のとき $P(s,t)=(s-t)(s+2t)$

より $s-t$ は $P(s,t)$ の因数であるが

$$P(y,x)=-(x-y)(2x+y)$$

より $P(x,y)\neq -P(y,x)$

よって十分条件ではない。■

〈講評〉

I (1) 標準：誘導に従えばよい。
(2) 標準：誘導に従えばよい。
(3) 標準 (a) 問題文どおり計算する。
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束を前提に考えればよい。

II 空間図形，体積（標準）

体積は $(0,0,t)$ と ℓ 上の点の距離の最大・最小をとらえられればよい。

III 整式の除法に関する証明（標準）

(2) $P(s,t)=P_n(s,t)$ とおき直すとかき易い。

(4) 反例を考えればよい。