医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和大学（医）　数学　試験日 2 月 4 日（土）

$\boxed{1}$ (1) $z^3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$ より

$w+\bar{w}=2\mathrm{Re}\,w=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}\right)$

$=4\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

より $w+\bar{w}=4\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{-\sqrt{5}-1}{4}=-1$ …（答）

(2)(3) $w\bar{w}=(z+z^3)(\bar{z}+\bar{z}^3)$

$=z\bar{z}+z\bar{z}^3+z^3\bar{z}+z^3\bar{z}^3$

$=1+\bar{z}^2+z^2+1$

$=2+2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ …(2)の（答）

$w\bar{w}$ の虚部は 0 …(3)の（答）

(4) $z^2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, $z^3=\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}$

より $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと、双曲線は $\frac{\left(x-\cos\frac{4\pi}{5}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0, b>0)$ とおけ

$2b=\sin\frac{4\pi}{5}$, $a^2+b^2=\sin^2\frac{4\pi}{5}$ より

$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$, $b=\frac{1}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$

漸近線の傾きの絶対値は $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ …（答）

$\boxed{2}$ (1) $a+b=8-c$, $a^2+b^2=32-c^2$ より

$$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=c^2-8c+16$$

a, b を2解とする x の2次方程式の1つは

$$x^2-(8-c)x+(c^2-8c+16)=0$$

a, b は実数だから

$$(8-c)^2-4(c^2-8c+16)\geqq 0$$

$$0\leqq c\leqq\frac{16}{3}\quad\cdots(答)$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと $t>0$ であり、不等式は

$$t^3\leqq 21t-20$$

$$(t-1)(t+5)(t-4)\leqq 0$$

$t>0$ より $1\leqq t\leqq 4$ 　$\therefore -2\leqq x\leqq 0$ $\cdots$(答)

(3) $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ とおくと $|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$

であり $\vec{a}=\dfrac{\vec{p}+3\vec{q}}{10}$, $\vec{b}=\dfrac{3\vec{p}-\vec{q}}{10}$ $\therefore \vec{a}+\vec{b}=\dfrac{2\vec{p}+\vec{q}}{5}$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{1}{25}(4|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)=5+\frac{4}{25}\vec{p}\cdot\vec{q}$$

$-25\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq 25$ より $1\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 3$ $\cdots$(答)

(4) (4-1) $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$ より $\log_a b=2x-1$

$$y=\frac{\log_a b}{x}=2-\frac{1}{x}$$

$a>1$, $\sqrt{ab}>1$ より $x>0$ で $x-y=x+\frac{1}{x}-2$

$a\neq b$ より $x\neq 1$ だから $x+\frac{1}{x}>2$ $\therefore x>y$ $\cdots$(答)

(4-2) $y=\dfrac{1}{\log_b\sqrt{ab}}$, $w=\dfrac{1}{\log_b\frac{a+b}{2}}$

$a>1$, $b>1$, $a\neq b$ より $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

よって $\log_b \dfrac{a+b}{2} > \log_b \sqrt{ab}$　$\therefore\ y > w$ …(答)

(4-3) $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > 1$, $a > 1$ より $z > x$

したがって　$z > x > y > w$ …(答)

$\boxed{3}$ (1) $A(4t, 3t)\ (t>0)$ とおけ $OA = 5t = 5$ より

$t = 1$　$\therefore\ A(4, 3)$ …(答)

(2) ②の O における接線は $y = -\dfrac{4}{3}x$ だから

② は $y = ax^2 - \dfrac{4}{3}x$ とおけ，A を通るから

$a = \dfrac{25}{48}$　② : $y = \dfrac{25}{48}x^2 - \dfrac{4}{3}x$ …(答)

(3) P は $y < \dfrac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x - 4y > 0$ をみたす領域

にあるから．

$$h = \frac{1}{5}\left\{3p - 4\left(\frac{25}{48}p^2 - \frac{4}{3}p\right)\right\}$$

$$= -\frac{5}{12}p^2 + \frac{5}{3}p \quad \text{…(答)}$$

(4) $OP^2 = p^2 + \left(\dfrac{25}{48}p^2 - \dfrac{4}{3}p\right)^2$ であり．

$$t^2 = OP^2 - h^2 = p^2 + \left(\frac{25}{48}p^2 - \frac{4}{3}p\right)^2 - \left(-\frac{5}{12}p^2 + \frac{5}{3}p\right)^2$$

$$= p^2 + \left(\frac{5}{48}p^2 + \frac{1}{3}p\right)\left(\frac{15}{16}p^2 - 3p\right) = \left(\frac{5}{16}p^2\right)^2$$

よって　$t = \dfrac{5}{16}p^2$ …(答)

(5) ①とx軸の正方向とのなす角をθとおくと

$\tan\theta=\frac{3}{4}$ であり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta=\frac{4}{5}$

よって

$$V=\pi\cos\theta\int_0^4\left(\frac{3}{4}x-\left(\frac{25}{48}x^2-\frac{4}{3}x\right)\right)^2dx$$

$$=\pi\cdot\frac{4}{5}\int_0^4\left(\frac{25}{48}x(4-x)\right)^2dx$$

$$=\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{25^2}{48^2}\int_0^4x^2(4-x)^2dx$$

$$=\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{25^2}{48^2}\cdot\frac{2!2!}{5!}(4-0)^5$$

$$=\frac{200}{27}\pi \quad \cdots(答)$$

④ (1) 和が $2k$ (kは2以上の自然数) となるのは

2枚が $(1,2k-1),(2,2k-2),\cdots,(k-1,k+1)$

の $k-1$ 通り.

和が $2k-1$ (kは2以上の自然数) となるのは

2枚が $(1,2k-2),(2,2k-3),\cdots,(k-1,k)$

の $k-1$ 通り.

(1-1) $n=8$ のとき

$$2\times\sum_{k=2}^{4}(k-1)=2(1+2+3)=12 \text{ 通り} \quad \cdots(答)$$

(1-2) $n=2k$ のとき $k=2,3,4$，$n=2k-1$ のとき

$k=2,3,4,5$ だから

$$\sum_{k=2}^{4}(k-1)+\sum_{k=2}^{5}(k-1)=12+(5-1)=16\text{ 通り}\quad\cdots(\text{答})$$

(1-3) $n=2k$ のとき $k=\frac{n}{2}$ だから

$$\sum_{k=2}^{\frac{n}{2}}2(k-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)(2+n-2)=\frac{n(n-2)}{4}\quad\cdots(\text{答})$$

(1-4) $n=2k-1$ のとき $k=\frac{n+1}{2}$ だから

$$\sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}}(k-1)+\sum_{k=2}^{\frac{n+1}{2}}(k-1)=\sum_{k=2}^{\frac{n-1}{2}}2(k-1)+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)(2+n-3)+\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)^2}{4}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k-(p+(p+1))=2023$ より

$$p=\frac{1}{4}\left(n(n+1)-4048\right)$$

$0<p<n$ より $0<\frac{1}{4}\left(n(n+1)-4048\right)<n$

すなわち $n(n-3)<4048$，$n(n+1)>4048$

$65\cdot62=4030$，$66\cdot63=4158$ より $n\leqq65$

$64\cdot65=4160$，$63\cdot64=4032$ より $n\geqq64$

p は整数より n は4の倍数だから

$$n=64,\quad p=28\quad\cdots(\text{答})$$

〈講評〉結果のみだから．$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ では $\sin\frac{2}{5}\pi$ などの値と斜回転体の公式を覚えておくと便利である．