医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京医科大学　数学　試験日 2 月 8 日（水）

第1問

(1) Xに感染していて陽性となる確率は $\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$

Xに感染していないで陽性となる確率は $\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$

よって求める確率は

$$\frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{25}+\frac{9}{50}}=\frac{16}{25}\quad\cdots(答)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(k\cdot{}_nC_k)=\sum_{k=1}^{n}(n\,{}_{n-1}C_{k-1})=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_{k-1}$

$$=2^{n-1}\times n>10000$$

$\{n\cdot 2^{n-1}\}$はnの増加数列で $10\cdot 2^{10-1}=5120,\ 11\cdot 2^{11-1}=11264$

より求めるnは　11　…(答)

(3) $(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ が正の実数となるのは

$\cos\frac{n\pi}{4}>0$ かつ $\sin\frac{n\pi}{4}=0$ のときだから kを自然数として

$\frac{n\pi}{4}=2k\pi \iff n=8k$ のときであり，

$100\leqq 8k<1000$ より $13\leqq k\leqq 124$ だから nは

$124-12=112$ 個　…(答)

(4) $f(x)=(1+x)\log\frac{3+x}{5+x}=\log\left\{\left(1-\frac{2}{5+x}\right)^{-\frac{5+x}{2}}\right\}^{-\frac{2(1+x)}{5+x}}$

より $\lim_{x\to\infty}f(x)=\log e^{-2}=-2$　…(答)

第2問

(1) 全体の場合の数は ${}_{16}C_3=560$ 通り

Mが素数となるのは、1枚が素数、2枚が1のときだから、

$$\frac{8}{560}=\frac{1}{70} \quad \cdots (答)$$

(2) Mが4の倍数にならないのは、

(ア) 3枚とも奇数 (${}_8C_3=56$ 通り)

(イ) 2または6から1枚と奇数2枚 (${}_4C_1\cdot{}_8C_2=112$ 通り)

よって Mが4の倍数になるのは

$$1-\frac{56+112}{560}=1-\frac{168}{560}=\frac{7}{10} \quad \cdots (答)$$

(3) Mが8の倍数でない4の倍数となるのは、

(ア) 2または6から2枚と奇数1枚 (${}_4C_2\cdot 8=48$ 通り)

(イ) 4が1枚と奇数2枚 ($2\cdot{}_8C_2=56$ 通り)

だから Mが8の倍数となる確率は (2)から

$$\frac{7}{10}-\frac{48+56}{560}=\frac{7}{10}-\frac{13}{70}=\frac{36}{70}=\frac{18}{35}$$

このとき、Mが8の倍数かつ $S\geqq M$ となるときを考える。

3枚のカードを a, b, c とおくと $a+b+c\geqq abc$

(ア) $a=8$ のとき $8+b+c\geqq 8bc$

$b=1$ のとき　$c+9\geqq 8c$　$\therefore c=1$

$b=2$ のとき　$c+10\geqq 16c$　不適

$b\geqq 3$ のときも不適

(イ) $a\neq 8$ のとき $a=4$ とおくと $4+b+c\geqq 4bc$

残りの1枚は 2, 4, 6 のいずれかでいずれも不適

よって Mが8の倍数かつ $S\leqq M$ となるのは1通りだから、

求める確率は

$$\frac{\frac{18}{35}-\frac{1}{560}}{\frac{18}{35}}=\frac{288-1}{288}=\frac{287}{288} \quad \cdots (答)$$

第3問

(1) 平面ABCの方程式は $x+y+z=3$ より

$$OH=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,2,1)$ より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot14-100}=\sqrt{3}$$

よって四面体OABCの体積は $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=1$ …(答)

(2) $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'}=2\overrightarrow{OC}$ とおくと、Pは

OA', OB', OC' を3辺とする平行六面体の周と内部を動く。

よって、その体積は OA, OB, OC を3辺とする平行六面体

の $2^3=8$ 倍となるから

$$2\triangle ABC\times OH\times 8=48 \quad \cdots(答)$$

(3) $\overrightarrow{OH}\perp$ 平面ABC をみたす平面ABC上の点Hは $H(1,1,1)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より θ が最大のとき $\cos\theta$ は最小となり、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$

と $\overrightarrow{OH}$ のなす角の余弦の最小を求めればよい。$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OH}$

のなす角をそれぞれ α, β, γ とすると、

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \text{ で、} \frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \text{ より}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots(答)$$

第4問

(1) $f'(x) = \log(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1}$

$f''(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$ …(答)

$x > -1$ において $f''(x) > 0$ であり, $f'(x)$ は単調増加で

$\lim_{x \to -1+0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$

だから $f'(x) = 0$ をみたす x は 1 個 …(答)

(2) $f'(x) = 0$ の解を $x = \alpha$ とすると $f(x)$ は $x = \alpha$ で極小となり,

$f(0) = f(1) = 0$ より 求める面積は

$\int_0^1 -(x-1)\log(x+1)\,dx = \int_0^1 \left(2\log(x+1) - (x+1)\log(x+1)\right) dx$

$= 2\left[(x+1)\log(x+1) - x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2\right]_0^1$

$= 2\log 2 - \dfrac{5}{4}$ …(答)

(3) $(1, f(1))$ における接線は $y = (\log 2)(x-1)$

$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \leqq (\log 2)(x-1)$ より

求める面積は

$\int_0^1 \left((x-1)\log(x+1) - (\log 2)(x-1)\right) dx$

$= -\left(2\log 2 - \frac{5}{4}\right) - \log 2\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_0^1$

$= \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2}\log 2$ …(答)

〈講評〉

第1問

(1) 標準：よくある条件付き確率の問題

(2) 標準：二項係数についての関係式を用いて二項定理に帰着させる問題

(3) 標準：ドモアブルの定理

(4) 標準：eに関する極限に帰着させる問題

第2問

標準

(1) 数え上げ

(2) 直接数えても，余事象でもよい．

(3) Mが8の倍数である確率は(2)を利用．

$S<M$については余事象$S \geqq M$となる場合を考える．

第3問　標準

(1) A, B, Cの各座標の和が一定だから平面の方程式がはやい．

(2) 平面ベクトルで出てくる存在領域の空間の場合．平行六面体ができる．

(3) 四面体$OABC$を各方向2倍にしたものだから，3辺OA, OB, OCに着目できればよい．

第4問　標準

(1) $f''(x)$を利用して$f'(x)$のようすを考える．

(2) x軸との交点を見つければあとは計算だけ．

(3) (2)の結果も利用できる．

第2問の(3)と第3問(2)(3)の出来によるセットである．