医学部専門予備校　クエスト　解答速報

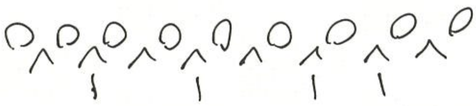
東京慈恵会医科大学　数学　　試験日2月9日（木）

1. $r_5 = 9-(r_1+r_2+r_3+r_4)$ とおくと.

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=9 \\ r_k \geqq 1 \quad (k=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

（$r_k \leqq 5$ は、この条件のもとで成立）

これを満たす $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ の組の個数は. 重複組合せを考えて.



9個の ○ の 8ヶ所のすき間に4本のしきり線を入れる入れ方に等しいので.

$${}_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70 \text{ 通り}$$

よって. $P(r_1+r_2+r_3+r_4 \leqq 8) = {}_8C_4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{14}{125}$ （答）

$\frac{4}{r_1r_2}+\frac{2}{r_3r_4}=1$ より $r_1r_2r_3r_4-2r_1r_2-4r_3r_4=0$

よって. $(r_1r_2-4)(r_3r_4-2)=8$

これより $(r_1r_2-4,\ r_3r_4-2)=(1,8),\ (2,4),\ (4,2),\ (8,1)$

よって. $(r_1r_2,\ r_3r_4)=(5,10),\ (6,6),\ (8,4),\ (12,3)$

$r_1r_2=5$ のとき $(r_1,r_2)=(1,5),\ (5,1)$

$r_3r_4=10$ のとき $(r_3,r_4)=(2,5),\ (5,2)$

$r_1r_2=6$ のとき $(r_1,r_2)=(2,3),\ (3,2)$　　$r_3r_4=6$ も同様

$r_1r_2=8$ のとき $(r_1,r_2)=(2,4),\ (4,2)$

$r_3r_4=4$ のとき $(r_3,r_4)=(1,4),\ (2,2),\ (4,1)$

$r_1r_2=12$ のとき $(r_1,r_2)=(3,4),\ (4,3)$

$r_3r_4=3$ のとき $(r_3,r_4)=(1,3),\ (3,1)$

よって. $P\left(\frac{4}{r_1r_2}+\frac{2}{r_3r_4}=1\right)=(2\times2+2\times2+2\times3+2\times2)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{18}{625}$ （答）

2. (1) $f(x)=x+\frac{1}{n}\int_0^x f(t)\,dt$ —— ①

①の両辺をxで微分して

$$f'(x)=1+\frac{1}{n}f(x)$$

このとき、

$$h'(x)=\left\{e^{-\frac{x}{n}}f(x)\right\}'=-\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}f(x)+e^{-\frac{x}{n}}\left\{1+\frac{1}{n}f(x)\right\}=e^{-\frac{x}{n}}$$

$$\therefore\ h'(x)=e^{-\frac{x}{n}}\quad (答)$$

よって、$h(x)=\int e^{-\frac{x}{n}}dx=-ne^{-\frac{x}{n}}+C$ （Cは積分定数）

①に$x=0$を代入すると $f(0)=0$ となり、$h(0)=e^0\cdot f(0)=0$ であるから

$$0=h(0)=-n\cdot e^0+C \qquad \therefore\ C=n$$

$$\therefore\ h(x)=n\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)\quad (答)$$

(2) (1)より $e^{-\frac{x}{n}}f(x)=n\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)$

$$\therefore\ f(x)=n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)$$

x座標がtである点で $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が交わり、2曲線の接線が直交するとすると、$f'(x)=e^{\frac{x}{n}}$, $g'(x)=-\frac{a}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ より

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)\cdot g'(t)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} n\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)=ae^{-\frac{t}{n}}+a & \text{—— ②} \\ e^{\frac{t}{n}}\cdot\left(-\frac{a}{n}e^{-\frac{t}{n}}\right)=-1 & \text{—— ③} \end{cases}$$

③より $-\frac{a}{n}=-1$ となるから $a=n$ (答)

(3) $a=n$を②に代入して $e^{\frac{t}{n}}-1=e^{-\frac{t}{n}}+1$

よって、$\left(e^{\frac{t}{n}}\right)^2-2e^{\frac{t}{n}}-1=0$ より $e^{\frac{t}{n}}=1\pm\sqrt{2}$

ここで、$e^{\frac{t}{n}}>0$ であるから $e^{\frac{t}{n}}=1+\sqrt{2}$ であり、$t=n\log(1+\sqrt{2})$

$$f(x)-g(x)=n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)-n\left(e^{-\frac{x}{n}}+1\right)=ne^{-\frac{x}{n}}\left\{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^2-2\cdot e^{\frac{x}{n}}-1\right\}$$

$$=ne^{-\frac{x}{n}}\left\{e^{\frac{x}{n}}-(1+\sqrt{2})\right\}\left\{e^{\frac{x}{n}}-(1-\sqrt{2})\right\}$$ となるので、

$0\leqq x\leqq t$ において、$f(x)-g(x)\leqq 0$ となる。

これより,

$$S_n=\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^t n\left(2-e^{\frac{x}{n}}+e^{-\frac{x}{n}}\right)dx$$

$$=n\left[2x-ne^{\frac{x}{n}}-ne^{-\frac{x}{n}}\right]_0^t=n\left(2t-ne^{\frac{t}{n}}-ne^{-\frac{t}{n}}+n+n\right)$$

$$=n\cdot\left\{2n\log(1+\sqrt{2})-n(1+\sqrt{2})-n\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}+2n\right\}$$

$$=2n^2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}$$

$$\therefore\quad S_n=2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}n^2$$

このとき,

$$S_1+S_2+\cdots+S_n=2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{3}\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}n(n+1)(2n+1)$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\quad(\text{答})$$

3． $\mathrm{OP}=\sqrt{2r^2+3s^2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く．（背理法を利用）

$\sqrt{2r^2+3s^2}=t$ （tは有理数）と仮定すると，

$$2r^2+3s^2=t^2$$

ここで，$r=\dfrac{q_1}{p_1}$，$s=\dfrac{q_2}{p_2}$，$t=\dfrac{q_3}{p_3}$ （$p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ は正の整数で，

p_1とq_1は互いに素，p_2とq_2は互いに素，p_3とq_3は互いに素）

とおくことができて，p_1, p_2, p_3の最小公倍数をlとすると，

$$lr=\frac{l}{p_1}\cdot q_1,\quad ls=\frac{l}{p_2}\cdot q_2,\quad lt=\frac{l}{p_3}\cdot q_3 \text{ は正の整数となる。}$$

$x=lr$，$y=ls$，$z=lt$ とおくと，$2(lr)^2+3(ls)^2=(lt)^2$ が成立するので，

$$2x^2+3y^2=z^2$$

を満たす正の整数x, y, zが存在することになる．

ここで，x, y, z の最大公約数をgとして，$x=ga$，$y=gb$，$z=gc$

とおくと，3数a, b, cの最大公約数は1となり，

$$2a^2+3b^2=c^2$$

が成立する．

このとき，$0^2\equiv 0 \pmod 3$，$1^2\equiv 1 \pmod 3$，$2^2\equiv 1 \pmod 3$ であるから，

平方数を3で割った余りは0または1となる．$\left(\begin{cases} n\equiv 0 \pmod 3 \Longleftrightarrow n^2\equiv 0 \pmod 3 \\ n\not\equiv 0 \pmod 3 \Longleftrightarrow n^2\equiv 1 \pmod 3 \end{cases}\right)$ これを(＊)とする．

よって，$a\not\equiv 0 \pmod 3$ とすると $a^2\equiv 1 \pmod 3$ となるので

$$c^2=2a^2+3b^2\equiv 2 \pmod 3$$

となり，c^2を3で割った余りが2となるので矛盾する．

したがって，$a\equiv 0 \pmod 3$ でなければならないので，

$a=3d$ （dは正の整数）とおくことができて

$$2(3d)^2+3b^2=c^2 \quad \text{より} \quad c^2=3(6d^2+b^2)$$

よって，c^2が3で割り切れるので，(＊)より cは3で割り切れる．

これより，$c=3e$ （eは正の整数）とおくと

$3(6d^2+b^2)=(3e)^2$ すなわち $6d^2+b^2=3e^2$

となる.

すると, $b^2=3(e^2-2d^2)$ となるので b^2 は 3 の倍数となり,

(※) より b は 3 の倍数である.

以上より, a, b, c がすべて 3 で割り切れることになるが,

これは a, b, c の最大公約数が 1 であることに矛盾する.

したがって, 線分 OP の長さは無理数となる. (証明終)

4. (1) 点Rは直線AP上より

$$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OP}=(sr\cos\theta,\ sr\sin\theta,\ 1-s)\quad (s:実数)$$

と表せる.

また, 点Rは直線BQ上より

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{t}{r}\cos\theta,\ \frac{t}{r}\sin\theta,\ t-1\right)\quad (t:実数)$$

と表せる.

よって,
$$\begin{cases} sr\cos\theta=\dfrac{t}{r}\cos\theta & \text{—①} \\ sr\sin\theta=\dfrac{t}{r}\sin\theta & \text{—②} \\ 1-s=t-1 & \text{—③} \end{cases}$$

①, ②で $\cos\theta$ と $\sin\theta$ が同時に0になることはないので

$$sr=\frac{t}{r}\qquad \therefore\ t=r^2s \quad \text{—④}$$

③より $s+t=2$ であるから, ④を代入して

$$(1+r^2)s=2\qquad \therefore\ s=\frac{2}{1+r^2}$$

したがって, $\overrightarrow{OR}=\left(\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta,\ \dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta,\ 1-\dfrac{2}{1+r^2}\right)$ となるので

$$\begin{cases} a=\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta & \text{—⑤} \\ b=\dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta & \text{—⑥} \\ c=1-\dfrac{2}{1+r^2} & \text{—⑦} \end{cases}$$

⑤, ⑥より $a^2+b^2=\dfrac{4r^2}{(1+r^2)^2}$ —⑧

⑦より $1+r^2=\dfrac{2}{1-c}$ すなわち $r^2=\dfrac{2}{1-c}-1=\dfrac{1+c}{1-c}$ となるので

⑧の右辺は,

$$\frac{4r^2}{(1+r^2)^2}=\frac{4\cdot\frac{1+c}{1-c}}{\left(\frac{2}{1-c}\right)^2}=(1+c)(1-c)=1-c^2$$

よって, $a^2+b^2=1-c^2$ となるので.

$$a^2+b^2+c^2=1\ (答)$$

(2) $r\cos\theta=\frac{1}{2}$ と $r>0$ より $\cos\theta>0$ なので $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり，

$r=\frac{1}{2\cos\theta}$ となるので，点Rの座標は，(1)より

$$(a,b,c)=(sr\cos\theta,\ sr\sin\theta,\ 1-s)$$

$$=\left(\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{2}s\tan\theta,\ 1-s\right)$$ となり，

$a^2+b^2+c^2=1$ に代入して，

$$\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{4}s^2\tan^2\theta+1-2s+s^2=1$$

$$\therefore\ s\left(\frac{5}{4}s+\frac{1}{4}s\tan^2\theta-2\right)=0$$

ここで，$s=\frac{2}{r^2+1}>0$ であるから

$$\frac{s}{4}(5+\tan^2\theta)-2=0 \qquad \therefore\ s=\frac{8}{5+\tan^2\theta}$$

このとき，

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OR}=4a+b+c$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}s\tan\theta+1-s$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\tan\theta\right)s+1$$

$$=\frac{4(2+\tan\theta)}{5+\tan^2\theta}+1$$

$\therefore\ \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{4(\tan\theta+2)}{\tan^2\theta+5}+1\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めればよい．

$t=\tan\theta$ とおくと，t はすべての実数値を変化し，

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{4(t+2)}{t^2+5}+1$$

$f(t)=\frac{4(t+2)}{t^2+5}+1$ とおくと，

$$f'(t)=4\cdot\frac{1\cdot(t^2+5)-(t+2)\cdot 2t}{(t^2+5)^2}=\frac{-4(t^2+4t-5)}{(t^2+5)^2}=\frac{-4(t+5)(t-1)}{(t^2+5)^2}$$

t	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘		↗	3	↘

$f(1)=3$

$$\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\left\{\frac{4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}{1+\frac{5}{t^2}}+1\right\}=1$$

よって、$y=f(t)$ は $t=1$ のとき最大値 3 をとる。

このとき、$\tan\theta=1$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ より $\theta=\frac{\pi}{4}$ であり、

$$r\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2} \text{ より } r=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s=\frac{2}{r^2+1}=\frac{2}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4}{3}$$

よって、 $a=\frac{1}{2}s=\frac{2}{3}$

$$b=\frac{1}{2}s\tan\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

$$c=1-s=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$$

以上より、 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OR}$ の最大値は 3 (答)

そのときの a, b, c の値は、

$$(a, b, c)=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$ (答)