## 医学部専門予備校　クエスト　解答速報

### 日本大学（医）二次　数学　　試験日 2 月 11 日（日）



[1]

(1) $x^3+2x^2+3x+2=4x+4$

$\Longleftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}\right)$$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+3x+2)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\Longleftrightarrow \underline{x=1,-1,-2}$

(2) $f(n)=n^3+2n^2+3n+2$

以下，合同式の法を 4 とする。

$n\equiv 1$ のとき，

$f(n)\equiv 1+2+3+2=8\equiv 0$

$n\equiv 2$ のとき，

$f(n)\equiv 2^3+2\cdot 2^2+3\cdot 2+2=24\equiv 0$

$n\equiv 3$ のとき，

$f(n)\equiv 3^3+2\cdot 3^2+3\cdot 3+2=56\equiv 0$

以上より、$n\not\equiv 0$ のとき，$f(n)\equiv 0$ であることが示された。

[2]　$P: y = ax^2 - ax + 2$

$H: y = \dfrac{4}{x} + 2a = g(x)$　$(0 < a < 8)$

(1)　PとHを連立すると、

$ax^2 - ax + 2 = \dfrac{4}{x} + 2a$

$\Leftrightarrow ax^3 - ax^2 + (2-2a)x - 4 = 0$

$$\left(\begin{array}{r|cccc} 2 & a & -a & 2-2a & -4 \\ & & 2a & 2a & 4 \\ \hline & a & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow (x-2)(ax^2 + ax + 2) = 0$

$\left( \begin{array}{l} ax^2 + ax + 2 = 0 \text{ について、} \\ D = a^2 - 8a = a(a-8) < 0 \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow x = 2$

以上より、PとHの交点は、$N(2, 2a+2)$

(2)　$l \perp m$ のとき、

$f'(2) \times g'(2) = -1$

$\left( f'(x) = 2ax - a \;,\; g'(x) = -\dfrac{4}{x^2} \right)$

$\Leftrightarrow 3a \times (-1) = -1$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

(3) $l : y = 3a(x-2) + (2a+2)$

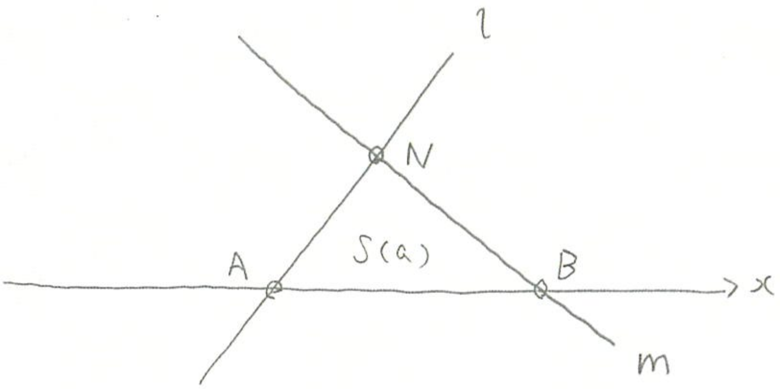
$\Leftrightarrow l : y = 3ax + (-4a+2)$

$m : y = -(x-2) + (2a+2)$

$\Leftrightarrow m : y = -x + (2a+4)$

$l$ と $x$ 軸, $m$ と $x$ 軸の交点をそれぞれ A, B とすると,

$A\left(\dfrac{4a-2}{3a},\ 0\right)$　$B(2a+4,\ 0)$ である。




$$S(a) = \frac{1}{2} \times \left(2a+4-\frac{4a-2}{3a}\right) \times (2a+2)$$

$$= (a+1)\left(2a+\frac{8}{3}+\frac{2}{3a}\right)$$

$$= \underline{2a^2+\frac{14}{3}a+\frac{10}{3}+\frac{2}{3a}} \quad (0 < a < 8)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 6 & 7 & 0 & -1 \\ & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$S'(a) = 4a + \frac{14}{3} - \frac{2}{3a^2} = \frac{12a^3+14a^2-2}{3a^2} = \frac{2(6a^3+7a^2-1)}{3a^2}$$

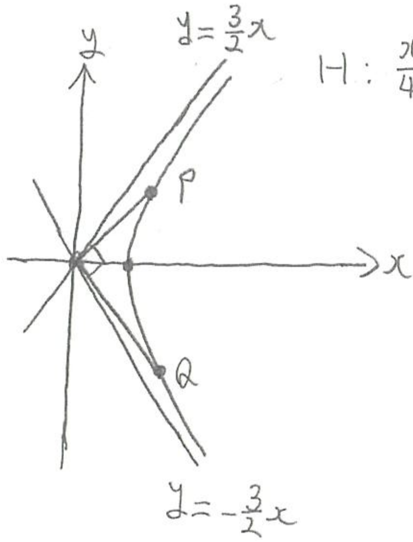
$$= \frac{2(a+1)(6a^2+a-1)}{3a^2} = \frac{2(a+1)(2a+1)(3a-1)}{3a^2}$$

| $a$ | 0 | … | $\frac{1}{3}$ | … | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | \ | − | 0 | + | \ |
| $S(a)$ | \ | ↘ | | ↗ | \ |

以上より,

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{14}{9} + \frac{10}{3} + 2 = \underline{\frac{64}{9}} \text{（最小値）}$$

[3]

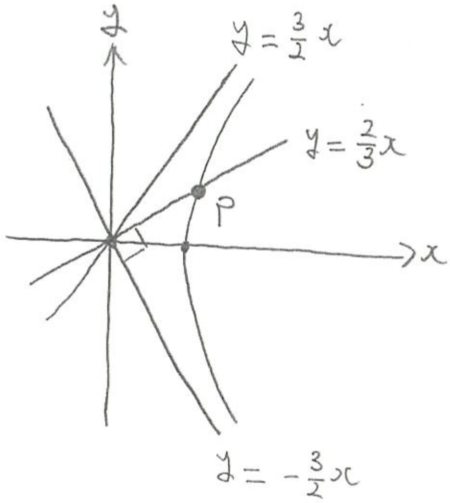



$H: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \ (x \geqq 2)$

対称性より、

Pが第1象限にあるときを考えれば十分である。

(1)




Pが左図のような位置にあるとき、

Hと $y = \dfrac{2}{3}x$ を連立すると、

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{81}x^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{324}{65} \text{ より、}$$

$$P\left(\frac{18}{\sqrt{65}}, \ \frac{12}{\sqrt{65}}\right)$$

したがって、条件を満たすPの$x$座標は、$\underline{x > \dfrac{18}{\sqrt{65}}}$

(2) Hの式において、

$x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ とすると

$$\frac{1}{4}r^2\cos^2\theta - \frac{1}{9}r^2\sin^2\theta = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad r^2 = \frac{36}{9\cos^2\theta - 4\sin^2\theta}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{9}\sin^2\theta$$

Pの偏角をθとすると、Qの偏角は $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \left(\frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{9}\sin^2\theta\right) + \left\{\frac{1}{4}\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{9}\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{9}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{1}{9}\cos^2\theta = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \underline{\frac{5}{36}} \text{（一定）}$$

(3) $\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}=\dfrac{OP^2+OQ^2}{OP^2\cdot OQ^2}=\dfrac{5}{36}$ より、

$$PQ^2=OP^2+OQ^2=\frac{5}{36}OP^2\cdot OQ^2$$

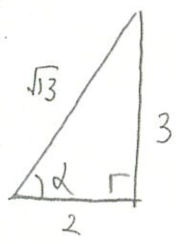
$$=\frac{5}{36}\cdot\frac{36}{9\cos^2\theta-4\sin^2\theta}\cdot\frac{36}{9\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-4\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

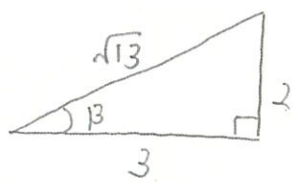
$$=180\cdot\frac{1}{9\cos^2\theta-4\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{9\sin^2\theta-4\cos^2\theta}$$

$$=180\cdot\frac{1}{97\sin^2\theta\cos^2\theta-36(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}$$

$$=180\cdot\frac{1}{169\sin^2\theta\cos^2\theta-36}$$

$$=720\cdot\frac{1}{169\sin^2 2\theta-144}\quad(\beta<\theta<\alpha)$$




$\beta<\dfrac{\pi}{4}<\alpha$ より、$2\beta<\dfrac{\pi}{2}<2\alpha$ であるから、

$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき、$PQ^2=720\cdot\dfrac{1}{169-144}=\dfrac{144}{5}$

$$PQ=\frac{12}{\sqrt{5}}\ (最小値)$$