医学部専門予備校　クエスト　解答速報

日本医科大学（後期）　数学　　試験日 3月 1日（水）

Medical school ミライを拓く 武器を君に 知は力なり

[I]　3回の試行のうち偶数の目が出た回数，奇数の目が出た回数と n_W，n_B の値についての関係を表にまとめると以下のようになる。

偶数の目	奇数の目	n_W	n_B	
3回	0回	偶数	0	⟶ (ア)
2回	1回	偶数	奇数	⟶ (イ)
1回	2回	偶数	偶数	⟶ (ウ)
0回	3回	0	奇数	⟶ (エ)

問1．$n_B=4$ となるのは，表の(ウ)の場合に限られ，2回の奇数の目が1の目と3の目である場合である。1の目，3の目，偶数の目が出る順列が $3!$ 通りであるから，求める確率は

$$P(n_B=4)=3!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\quad(\text{答})$$

問2．$n_B=3$ となるのは，表の(イ)と(エ)の場合に限られる。

(イ)の場合．3の目が1回と偶数の目が2回出る場合となる。

(エ)の場合．1の目が連続して3回出る場合となる。

よって，求める確率は

$$P(n_B=3)={}_3C_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{7}{54}\quad(\text{答})$$

問3．$n_W=8$ となるのは，表の(ア)と(イ)の場合である（(ウ)の場合には偶数の目が1回のみなので $n_W\leqq 6$ となってしまうため）。

(ア)の場合．2の目が2回と4の目が1回出る場合となる。

(イ)の場合．2の目，6の目，奇数の目が出る場合／4の目が2回と奇数の目が出る場合 のいずれかとなる。

よって、求める確率は

$$P(n_W=8)={}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+3!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+{}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{72}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{5}{36}\quad(\text{答})$$

問 4. $n_W=8$ となる事象を E，$n_B=0$ となる事象を F とすると、

求める条件つき確率は

$$P_E(\overline{F})=\frac{P(E\cap\overline{F})}{P(E)}=\frac{P(E)-P(E\cap F)}{P(E)}=1-\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$$

ここで、問3より $P(E)=\frac{5}{36}$ であり、$E\cap F$ は問3の(ア)の場合

であるから　$P(E\cap F)={}_3C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$ である。

よって、

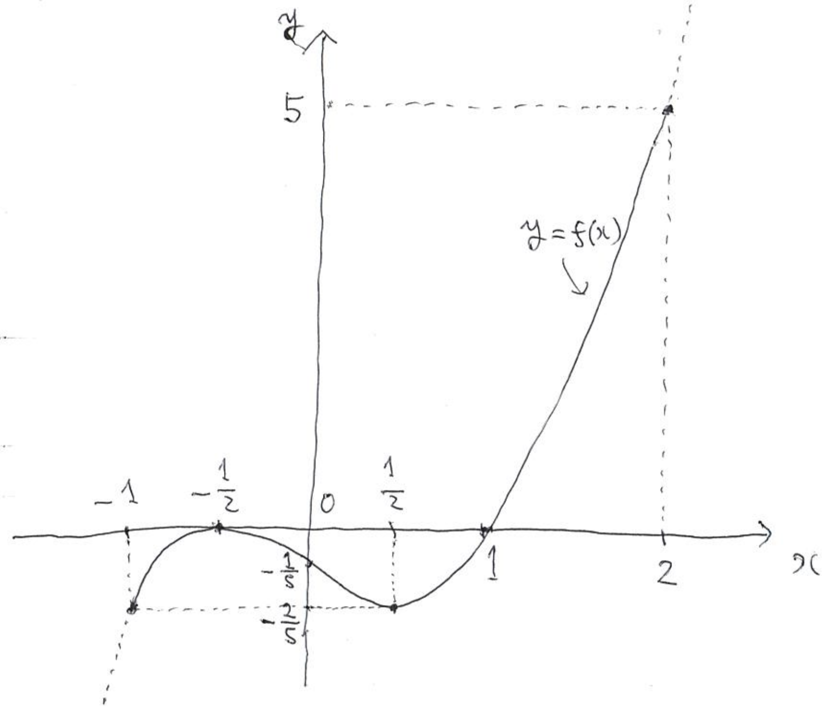
$$P_E(\overline{F})=1-\frac{\frac{1}{72}}{\frac{5}{36}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\quad(\text{答})$$

[II] 問1. $f(x)=\frac{1}{5}(x-1)(2x+1)^2$ と因数分解され，1 と $-\frac{1}{2}$ はともに $-1 \leqq x \leqq 2$ を満たすので，求める x の値は $x=1,\ -\frac{1}{2}$ （答）

問2. $f'(x)=\frac{3}{5}(2x+1)(2x-1)$ より，$y=f(x)$ の増減表は

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{5}$	↗	5

よって，曲線 C_1 の概形は，下図のようになる。



問3. $g_k(1)=1-\frac{2k+3}{5}+\frac{2k}{5}-\frac{2}{5}=0$ （答）

$g_k(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}-\frac{2k+3}{20}-\frac{k}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{3}{10}k-\frac{27}{40}$ （答）

問4. $g_k(1)=0$ より $g_k(x)$ は $x-1$ を因数にもち，

$$g_k(x)=\frac{1}{5}(x-1)\{5x^2-2(k-1)x+2\}$$

と因数分解されるので，

$$g_k(x)-f(x)=\frac{1}{5}(x-1)\{5x^2-2(k-1)x+2-(2x+1)^2\}$$
$$=\frac{1}{5}(x-1)\{x^2-2(k+1)x+1\}$$

よって、C_1 と $C_{2,k}$ は、共有点 $(1,0)$ をもち、その他の共有点の x 座標は、方程式 $x^2-2(k+1)x+1=0$ の $-1\leqq x\leqq 2$（ただし、$x\neq 1$）における解となる。 $x=0$ はこの2次方程式の解になりえないので $x\neq 0$ としてよいから、 $\dfrac{(x-1)^2}{2x}=k$ と定数分離して考える。 そこで、

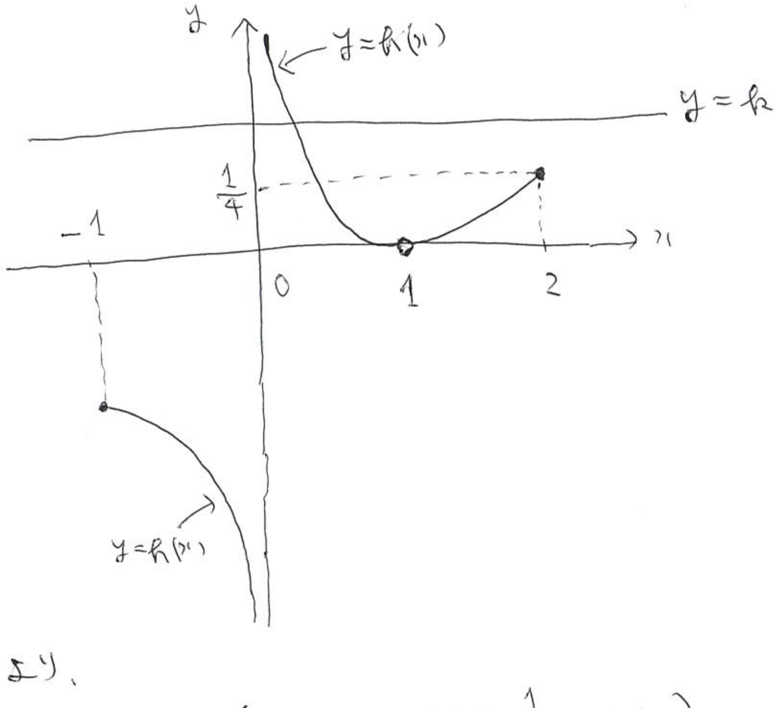
$h(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2x}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1$ とおいて、 $y=h(x)$ と $y=k$ の $-1\leqq x\leqq 2$（ただし、$x\neq 0,\ 1$）における共有点の個数を調べる。

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$$

x	-1		(0)		(1)		2
$h'(x)$	0	$-$	×	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-2	↘	×	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}h(x)=-\infty$

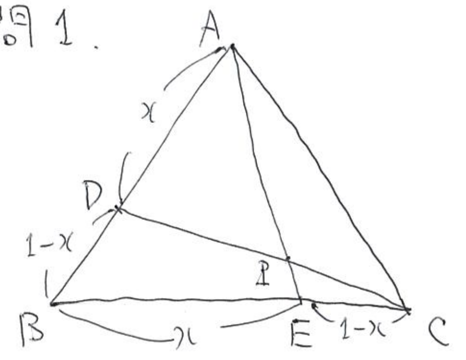


以上より、

$$N(k)=\begin{cases}2 & \left(k>\frac{1}{4}\text{ のとき}\right)\\ 3 & \left(0<k\leqq\frac{1}{4}\text{ のとき}\right)\\ 1 & (k=0\text{ のとき})\end{cases}$$

（答）

[Ⅲ] 問1.



メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BD}{DA}=1$$

$$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1-x}{x}=1$$

$$\therefore\ \frac{AP}{PE}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$S=\triangle APC=\frac{AP}{AE}\cdot\triangle AEC=\frac{AP}{AE}\cdot\frac{EC}{BC}\cdot\triangle ABC$$

$$=\frac{x}{x+(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}x(1-x)}{4(x^2-x+1)}\quad(\text{答})$$

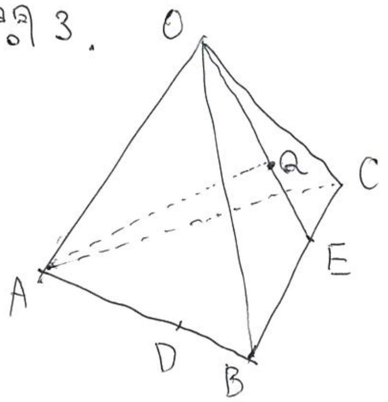
問2. $\overrightarrow{OE}=(1-x)\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OC}$ より

$$|\overrightarrow{OE}|^2=(1-x)^2|\overrightarrow{OB}|^2+2x(1-x)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+x^2|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$=(1-x)^2+x(1-x)+x^2\qquad(\because\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\tfrac{1}{2}\text{ より})$$

$$=x^2-x+1\qquad\therefore\ |\overrightarrow{OE}|=\sqrt{x^2-x+1}\quad(\text{答})$$

問3.



$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OE}$ (k:実数) とおくことができて、

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=k\{(1-x)\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OC}\}\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$=k\{(1-x)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\}$$

$$=k\left\{\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}x\right\}$$

$$=\frac{k}{2}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}=(x\overrightarrow{BA})\cdot\{(1-x)\overrightarrow{BC}\}=x(1-x)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}x(1-x)$$

よって、$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}$ より $k=x(1-x)=r$ となる。

また、$|\overrightarrow{OE}|=\sqrt{-x(1-x)+1}=\sqrt{1-r}$ であるから

$$|\overrightarrow{OQ}|=|r\overrightarrow{OE}|=r|\overrightarrow{OE}|=r\sqrt{1-r}$$

したがって、$T=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1\cdot r^2(1-r)-\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}$

$$=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{3}{4}-r}=\frac{r}{4}\sqrt{3-4r}\quad(\text{答})$$

問4.　$r=x(1-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$　$(0<x<1)$ より　$0<r\leqq\frac{1}{4}$

$$S=\frac{\sqrt{3}\,x(1-x)}{4(x^2-x+1)}=\frac{\sqrt{3}\,r}{4(1-r)}$$ となるので.

$$\frac{S}{T^2}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}\,r}{4(1-r)}}{\dfrac{r^2}{16}(3-4r)}=\frac{4\sqrt{3}}{r(1-r)(3-4r)}$$

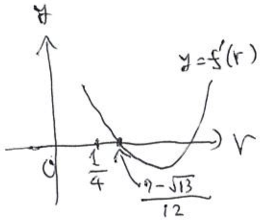
$f(r)=r(1-r)(3-4r)=4r^3-7r^2+3r$ とおくと、

$f'(r)=12r^2-14r+3$ となり、$f'(r)=0$ となるrの値は

$r=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$ となるので、

$$\frac{1}{4}-\frac{7-\sqrt{13}}{12}=\frac{\sqrt{13}-4}{12}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{16}}{12}<0$$ より

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$ となることに注意すると、



$0<r\leqq\frac{1}{4}$ で $f'(r)>0$ となり $f(r)$は単調増加する。

したがって、$f(r)$は $r=\frac{1}{4}$で最大値をとり、このとき $\frac{S}{T^2}$は最小となる。

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot2=\frac{3}{8}$$

$r=\frac{1}{4}$ となるのは $x=\frac{1}{2}$ のときであるから、

$\dfrac{S}{T^2}$は、$x=\frac{1}{2}$のとき最小値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ をとる。(答)

[IV] 問1 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx$

$$\left(\begin{array}{l} x+1=\sqrt{3}\tan\theta \ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \text{とおくと} \\ \frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \sqrt{3}-1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array} \end{array}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{3}\,d\theta = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{36} \quad (\text{答})$$

問2. (1) $0 \leqq x \leqq a\ (<1)$ において.

$$0 < \frac{1}{1-x^3} \leqq \frac{1}{1-a^3} \quad \text{より} \quad 0 \leqq \frac{x^{3n}}{1-x^3} \leqq \frac{x^{3n}}{1-a^3}$$

閉区間 $[0, a]$ で定積分して.

$$0 \leqq \int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}\,dx \leqq \int_0^a \frac{x^{3n}}{1-a^3}\,dx$$

ここで. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{3n}}{1-a^3}\,dx = \left[\frac{x^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}\right]_0^a = \frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$ より

$$0 \leqq I_n(a) \leqq \frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)} \quad \text{が成り立つ.} \quad (\text{証明終})$$

(2) $\displaystyle I_n(a) - I_{n+1}(a) = \int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}\,dx - \int_0^a \frac{x^{3(n+1)}}{1-x^3}\,dx$

$$= \int_0^a \frac{x^{3n}(1-x^3)}{1-x^3}\,dx = \int_0^a x^{3n}\,dx = \left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^{3n+1}}{3n+1} \qquad \therefore\ I_n(a) - I_{n+1}(a) = \frac{a^{3n+1}}{3n+1} \quad (\text{答})$$

問3. $\displaystyle S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{a^{3n}}{3n+1}$ とおくと.

$$S_N = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{N}\frac{a^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{N}\left\{I_n(a) - I_{n+1}(a)\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{I_0(a) - I_{N+1}(a)\right\}$$

ここで、$(p\sqrt{3}+q)^3 = 3(p^3+pq^2)\sqrt{3} + 9p^2q + q^3$ となるので、

$$\begin{cases} 3(p^3+pq^2) = \dfrac{3}{4} & \text{―①} \\ 9p^2q + q^3 = -\dfrac{5}{4} & \text{―②} \end{cases}$$ とすると、

$-5(p^3+pq^2) = 9p^2q+q^3$ が成り立つので、（①$\times\frac{5}{3}=-$②より）

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3 + 5\left(\frac{q}{p}\right)^2 + 9\cdot\frac{q}{p} + 5 = 0$$

$$\left(\frac{q}{p}+1\right)\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + 4\cdot\frac{q}{p} + 5\right\} = 0$$

$\frac{q}{p}$ が実数となるのは $\frac{q}{p} = -1$　$\therefore q = -p$

これを①に代入して　$p^3 = \frac{1}{8}$　$\therefore p = \frac{1}{2}$，$q = -\frac{1}{2}$

よって、$\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}-5}{4}$ となるので、$a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ をとる。

このとき、

$$I_0(a) = I_0\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{1-x^3}\,dx$$

ここで、$x = \frac{t}{2}$ とおくと、$dx = \frac{1}{2}dt$　$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \hline t & 0 \to \sqrt{3}-1 \end{array}$ であり

$$I_0(a) = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{8}{8-t^3}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4}{8-t^3}\,dt$$

$$\frac{4}{8-t^3} = \frac{1}{(2-t)(t^2+2t+4)}$$ であるから

$$\frac{4}{8-t^3} = \frac{A}{2-t} + \frac{B(2t+2)}{t^2+2t+4} + \frac{C}{t^2+2t+4}$$

$$= \frac{A(t^2+2t+4) + B(2-t)(2t+2) + C(2-t)}{(2-t)(t^2+2t+4)}$$ と分解されたとして、

$$A(t^2+2t+4) + 2B(2-t)(t+1) + C(2-t) = 4$$

$t=2$ を代入して　$A = \frac{1}{3}$

$t=-1$ を代入して、$3A+3C=4$　$\therefore C=1$

$t=1$ を代入して　$7A+4B+1=4$　$\therefore B=\frac{1}{6}$

よって、

$$I_0(a)=\int_0^{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-t}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(t^2+2t+4)'}{t^2+2t+4}+\frac{1}{t^2+2t+4}\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\log|2-t|+\frac{1}{6}\log|\underbrace{t^2+2t+4}_{(t+1)^2+3}|\right]_0^{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}\quad(\because 問1より)$$

$$=-\frac{1}{3}\log(3-\sqrt{3})+\cancel{\frac{1}{3}\log 2}+\frac{1}{6}\log 6-\cancel{\frac{1}{6}\log 4}+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{6}{(3-\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}=\frac{1}{6}\log\frac{(3+\sqrt{3})^2}{6}+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$$

$$=\frac{1}{6}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$$

$$\frac{1}{a}I_0(a)=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\left\{\frac{1}{6}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}\pi}{36}\right\}=\frac{\sqrt{3}+1}{36}\left\{6\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\pi\right\}$$

ここで、$0<a<1$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}=0$ であるから、

問2(1)の不等式より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}I_n(a)=0$$

が成立するので、

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{a}\{I_0(a)-I_{N+1}(a)\}=\frac{1}{a}I_0(a)$$

したがって、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n=\frac{\sqrt{3}+1}{36}\left\{6\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\pi\right\}\quad(答)$$