医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和大学（医）Ⅱ期　数学　　試験日 3月4日（土）

$\boxed{1}$ (1-1) $\{a_n\} = 1, 2, 6, 15, 31, 56, 92, \cdots$

の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、

$\{b_n\} = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots$ より、

$b_n = n^2$ であり、

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \end{cases}$ より、

$n \geqq 2$ において、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

以上より、$a_n = \underline{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1}$

(1-2) $\{a_n\} = 1, 2, 10, 37, 101, 226, 442, \cdots$

の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、

$\{b_n\} = 1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots$ より、

$b_n = n^3$ であり、

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^3 \end{cases}$ より、

$n \geqq 2$ において、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = 1 + \left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2$$

以上より、$a_n = \underline{\frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 1}$

(2) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ S_{n+1} = 4a_n + 8 \end{cases}$

$a_{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1} = (4a_{n+1} + 8) - (4a_n + 8)$

$S_2 = 4a_1 + 8 = 24$ より、$a_2 = S_2 - a_1 = 20$

したがって、

$\begin{cases} a_1 = 4,\ a_2 = 20 \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \end{cases}$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$（重解）より、

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$

したがって、$a_{n+1} - 2a_n = 12 \cdot 2^{n-1}$ $\cdots \times \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + 3$ より、

$\dfrac{a_n}{2^n} = 2 + 3(n-1) = 3n - 1 \Leftrightarrow a_n = (3n-1)2^n$

(3) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} = \dfrac{5a_n - 4}{a_n} \end{cases}$

$x = \dfrac{5x - 4}{x} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, 4$ より、

$b_n = \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1}$ とおくと、※り帰納的に $a_n \neq 1$ である。

$b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - 4}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{5a_n - 4}{a_n} - 4}{\dfrac{5a_n - 4}{a_n} - 1} = \dfrac{a_n - 4}{4a_n - 4} = \dfrac{1}{4} b_n$

$b_1 = 2$ より、$b_n = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{a_n - 4}{a_n - 1} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ $\cdots \times 4^n(a_n - 1)$

$\Leftrightarrow 4^n a_n - 4^{n+1} = 8(a_n - 1) \Leftrightarrow (4^n - 8)a_n = 4^{n+1} - 8$

$\Leftrightarrow a_n = \dfrac{4^{n+1} - 8}{4^n - 8}$ より、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 4$

$\boxed{2}$ (1) $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ とすると、$\phi^2=\phi+1$ が成り立つ。

$\phi^3=\phi\times\phi^2=\phi(\phi+1)=\phi^2+\phi=2\phi+1=\sqrt{5}+2$

したがって、$a=\underline{4}$, $b=\sqrt{5}-2$

$x^2+4x-1=0 \iff x=-2\pm\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r}
x^2-x+1 \\
x^2+4x-1\,\big)\,\overline{x^4+3x^3-4x^2+6x+1} \\
\underline{x^4+4x^3-x^2} \\
-x^3-3x^2+6x \\
\underline{-x^3-4x^2+x} \\
x^2+5x+1 \\
\underline{x^2+4x-1} \\
x+2
\end{array}$$

$x^4+3x^3-4x^2+6x+1$

$=(x^2+4x-1)(x^2-x+1)+(x+2)$

$b^2+4b-1=0$ より、

$b^4+3b^3-4b^2+6b+1=b+2=\underline{\sqrt{5}}$

(2) $x^3=1 \iff (x-1)(x^2+x+1)=0 \iff x=1,\omega,\omega^2$ とする。

$x^{2023}=(x^2+x+1)P(x)+(ax+b)$ とする。

$\omega^2+\omega+1=0$ より、

$\omega^{2023}=a\omega+b$

$\omega^3=1$ より、$\omega^{2023}=(\omega^3)^{674}\times\omega=\omega$ であるから、

$(a,b)=(1,0)$ したがって、余りは $\underline{x}$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,0)$

$\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-3)$ より、$\vec{n}=(3,-3,1)$ とすると、

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より、$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

平面ABC上の任意の点 $P(X,Y,Z)$ について、

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \iff 3(X-3)-3(Y-5)+(Z-1)=0$

$\iff 3X-3Y+Z+5=0$（平面ABCの方程式）

$D(1,x,-1)$ が平面ABC上にあるとき、$\underline{x=\frac{7}{3}}$

(4) $\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(-1,2)$ より、

$\triangle OAB=\frac{1}{2}|6-(-2)|=4$

$2|\alpha|+3|\beta|\leqq 6 \iff \frac{|\alpha|}{3}+\frac{|\beta|}{2}\leqq 1$

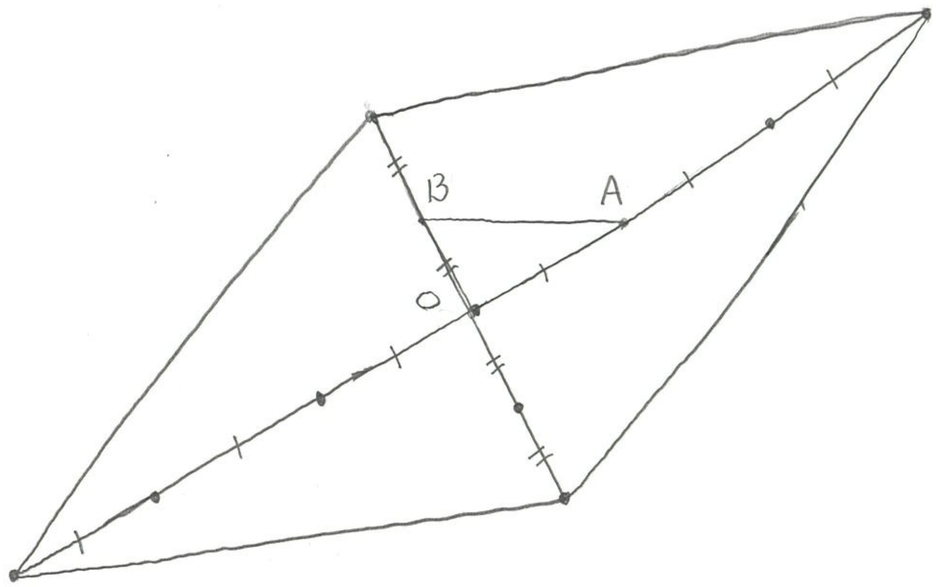
$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\frac{\alpha}{3}\cdot 3\vec{a}+\frac{\beta}{2}\cdot 2\vec{b}$

(i) $\begin{cases}\alpha\geqq 0\\ \beta\geqq 0\end{cases}$ のとき、$\vec{p}=\frac{|\alpha|}{3}\cdot 3\vec{a}+\frac{|\beta|}{2}\cdot 2\vec{b}$

(ii) $\begin{cases}\alpha\geqq 0\\ \beta< 0\end{cases}$ のとき、$\vec{p}=\frac{|\alpha|}{3}\cdot 3\vec{a}+\frac{|\beta|}{2}\cdot(-2\vec{b})$

(iii) $\begin{cases}\alpha< 0\\ \beta\geqq 0\end{cases}$ のとき、$\vec{p}=\frac{|\alpha|}{3}\cdot(-3\vec{a})+\frac{|\beta|}{2}\cdot 2\vec{b}$

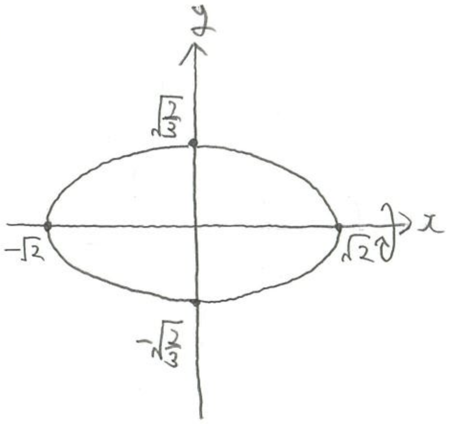
(iv) $\begin{cases}\alpha< 0\\ \beta< 0\end{cases}$ のとき、$\vec{p}=\frac{|\alpha|}{3}\cdot(-3\vec{a})+\frac{|\beta|}{2}\cdot(-2\vec{b})$



(i)〜(iv)より、Pの存在領域は上図の平行四辺形であり、その面積は、

$S=\triangle OAB\times 2\times 3\times 4=\underline{96}$

$\boxed{3}$ (1)



①：$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \iff y = \pm\sqrt{\frac{2-x^2}{3}}$

$$V_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \cdot \frac{2-x^2}{3}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[x\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{9}\pi\left[x^3\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{4\sqrt{2}}{9}\pi = \underline{\frac{8\sqrt{2}}{9}\pi}$$

(2) ①上の点 $P(p, q)$ に対応する②上の点を $Q(X, Y)$ とすると、

$$p + qi = (X + Yi) \times \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= (X + Yi) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + \frac{Y-X}{\sqrt{2}}i$$

$p^2 + 3q^2 = 2$ より、

$$\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{Y-X}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \quad \cdots \times 2$$

$$4X^2 - 4XY + 4Y^2 = 4$$

以上より、②：$\underline{x^2 - xy + y^2 = 1}$

(3) ②：$y^2 - xy + (x^2 - 1) = 0 \iff y = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3x^2}$

したがって、$4 - 3x^2 \geqq 0 \iff x^2 \leqq \frac{4}{3} \iff \underline{-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}}$

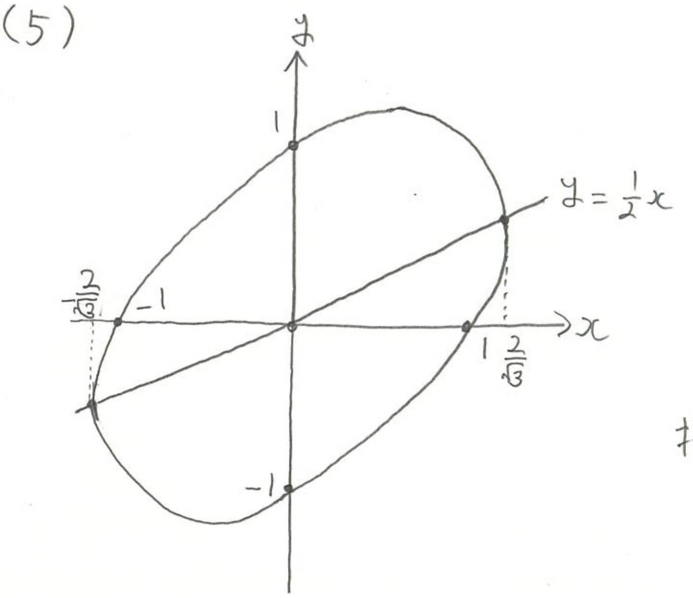
(4) ②において、$y = 0$ とすると、$x = \pm 1$ より、

②と x 軸の交点は $\underline{(1, 0)\ (-1, 0)}$

②において、$x = 0$ とすると、$y = \pm 1$ より、

②と y 軸の交点は $\underline{(0, 1)\ (0, -1)}$

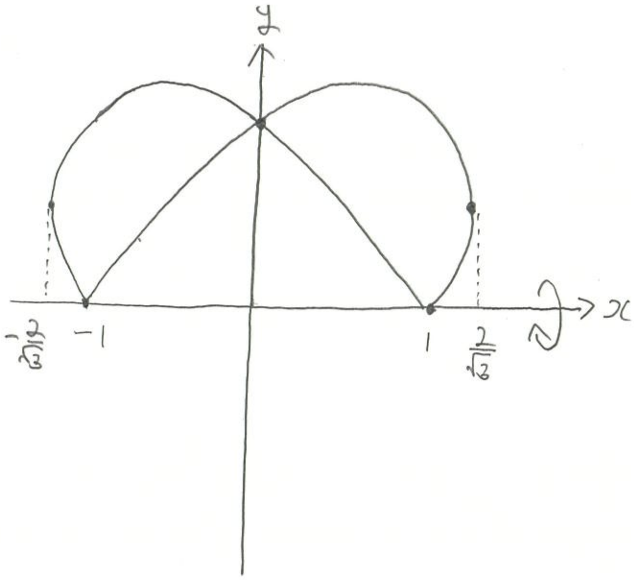
(5)



x軸で

⇒

折り返す.



$$V_2 = 2\left\{\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \pi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{4-3x^2}\right)^2 dx - \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \pi\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{4-3x^2}\right)^2 dx\right\}$$

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{4-3x^2}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4-3x^2}-\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$$

$$= -\frac{1}{12}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(-6x\sqrt{4-3x^2}\right)dx - \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left[x\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[(4-3x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{4\sqrt{3}}{27} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{14\sqrt{3}}{27}$$

$$\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{4-3x^2}\right)^2 dx = \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{4-3x^2}-\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$$

$$= \frac{1}{18}\left[(4-3x^2)\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{6}\left[x^3\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left[x\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

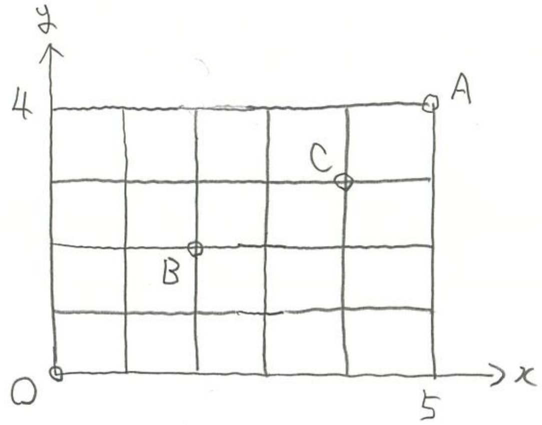
$$= -\frac{1}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{8\sqrt{3}}{9}-1\right) + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right) = -\frac{8}{9} + \frac{14\sqrt{3}}{27}$$

$$V_2 = 2\pi\left\{\left(\frac{4}{9}+\frac{14\sqrt{3}}{27}\right) - \left(-\frac{8}{9}+\frac{14\sqrt{3}}{27}\right)\right\} = \frac{8}{3}\pi$$

4 (1-1) 表が5回，裏が4回出ればよいので，

$$\frac{{}_9C_4}{2^9} = \underline{\frac{63}{256}}$$

(1-2)



Bを通りAに到達する確率は，

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_2}{2^9} = \underline{\frac{15}{128}}$$

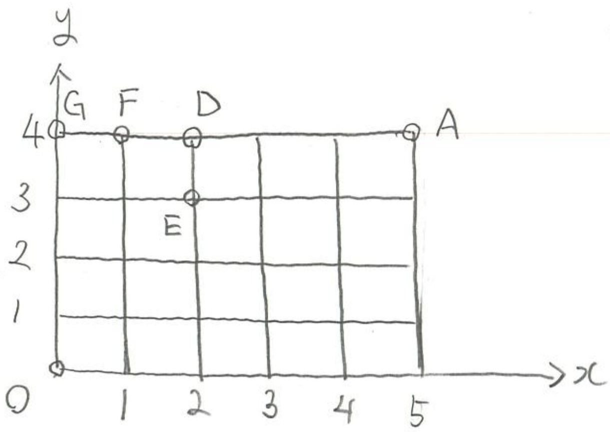
(1-3) BとCを通り，Aに到達する確率は，

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1}{2^9} = \underline{\frac{9}{128}}$$

(2-1) 必ずAに到達するので，$\underline{1}$

(2-2) Bに到達した後は，必ずAに到達するので，$\dfrac{{}_4C_2}{2^4} = \underline{\dfrac{3}{8}}$

(2−3)　Dに到達した後は，必ずAに到達する。



(i) Eを通ってDに到達する確率は，

$$\frac{{}_5C_2}{2^6} = \frac{5}{32}$$

(ii) Gを通らずにFを通ってDに到達する確率は，

$$\frac{5-1}{2^5} = \frac{1}{8}$$

(iii) Gを通ってDに到達する確率は，$\dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

(i)(ii)(iii)より，$\dfrac{11}{32}$