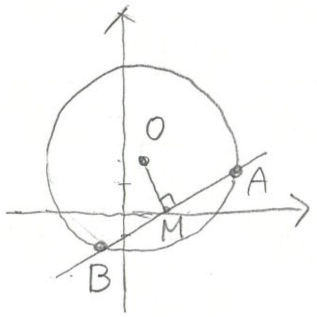
日本大学（医）後期　一次　数学　　試験日 3月 4日（土）

I. (1) $x^2+(4a-1)x-4a=0$ として判別式 $D=0$ を立てる。

$D=(4a+1)^2$ より $a=-\frac{1}{4}$ のときに重解 $x=1$ をもつ。

(2)



線分ABは円Oの弦なので、点と直線の距離を用いる。

OからABに垂線OMをひくと、

$$OM=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

三平方の定理より $AM=\sqrt{AO^2-OM^2}=\sqrt{7}$.

よって $AB=2AM=2\sqrt{7}$.

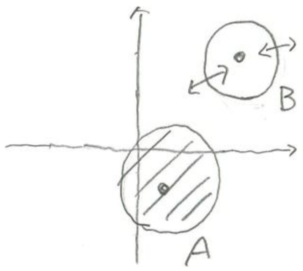
(3)
$$\begin{aligned}\log_{10}6^{20}&=20\log_{10}(2\times3)\\&=20\times(\log_{10}2+\log_{10}3)\\&=20\times(0.3010+0.4771)\\&=15.5\cdots\end{aligned}$$

$\log_{10}10^{15}<\log_{10}6^{20}<\log_{10}10^{16}$ より 16桁

(4) 係数が実数なので、xと共役な $-2-i$ も、解となる。

解と係数の関係より
$$a=-\{(-2+i)+(-2-i)\}=4$$
$$b=(-2+i)(-2-i)=5$$

(5) 図形的に考える．　円Bが円Aと共有点をもつときの円Bの半径の最小値は？



という問題になる。

それは，円Bが円Aに外接するとき。

よって，2円の半径の和が，中心間距離に等しければよい。

半径の和は $\sqrt{5}+\sqrt{a}$．　距離は $\sqrt{3^2+6^2}$ なので $3\sqrt{5}$．

$\therefore\ \sqrt{5}+\sqrt{a}=3\sqrt{5}$，　$a=20$．

II　1回の勝負で，あいこの確率は $\frac{1}{3}$。

(1) 5回勝負で3回あいこになる確率は，$_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

(2) 5回勝負であいこがちょうど3回連続する場合は

あいこが (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)．また (1, 2, 3, 5), (1, 3, 4, 5)

この5つの場合。

前半3つの確率の和は　$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$．

後半2つ　〃　　$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1$　　よって和は $\frac{16}{243}$

III.　$f(x)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+2\cos x\cos\frac{\pi}{6}-2\sin x\sin\frac{\pi}{6}$．

$=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x$．

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$．　$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{21}}{14}$　$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{14}$　…αは第2象限

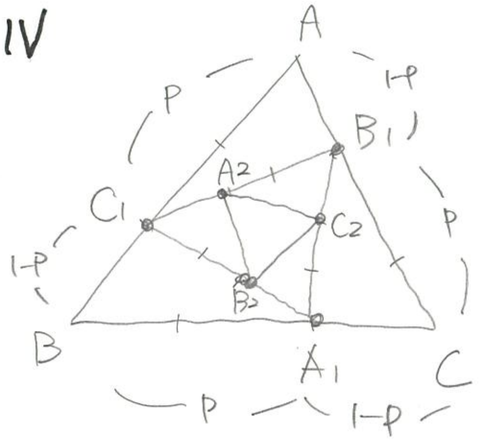
$0\leqq x\leqq\pi$．また $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より $\frac{\pi}{2}<x+\alpha<2\pi$．

この範囲で $f(x)$ の最小は，$x+\alpha=\frac{3}{2}\pi$ のとき，$-\sqrt{7}$．

最大は，$x=0$ のとき　のとき．$\frac{3\sqrt{21}}{14}\times\sqrt{7}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

［αは定数なので，xを小さくすれば $x+\alpha$ も小さくなる］

IV



漸化式を作る。

［ $p=\frac{1}{2}$ のとき，図より明らかに $S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$ ］．

$$\triangle AB_1C_1 = \underbrace{\triangle ACC_1} \times (1-p)$$

$$= \underbrace{(\triangle ABC \times p)} \times (1-p)$$

$$= \triangle ABC \times p(1-p)$$

同様に $\triangle BA_1C_1 = \triangle CB_1A_1 = \triangle ABC \times p(1-p)$

よって $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC - (\triangle AB_1C_1 + \triangle BA_1C_1 + \triangle CB_1A_1)$

$$= \triangle ABC\{1-3p(1-p)\},$$

$$\therefore S_{n+1} = S_n \cdot \{1-3p(1-p)\}.$$

(1) $p=\frac{1}{2}$ より $1-3p(1-p)=\frac{1}{4}$，　$S_5 = S\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$

$$= 4.$$

［ $S=4096=4^6$ より ］

(2) $p=\frac{1}{3}$ より $1-3p(1-p)=\frac{1}{3}$．　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{S\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$

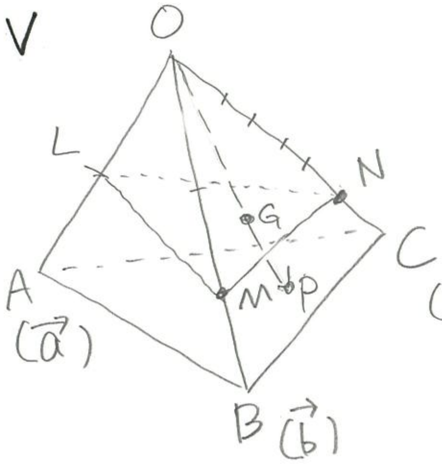
$$= S\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}S$$

(3) $0<1-3p(1-p)<1$ より．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1-3p(1-p)}{1-\{1-3p(1-p)\}}\cdot S$

与式より $\dfrac{1-3p(1-p)}{1-\{1-3p(1-p)\}} = \dfrac{2}{3}$　　$\therefore p=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}$

V



(1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$

$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$

$=\frac{k}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{18}\overrightarrow{OC}$

Pが△ABC上にあるとき，$\frac{k}{6}+\frac{k}{9}+\frac{k}{18}=1$ なので，$k=3$.

$\frac{OP}{OG}=\frac{3}{1}=3$

(3) 四面体の高さはすべて共通なので，底面積の比が体積比となる．

$V_1:V_2:V_3=\triangle ABP:\triangle BCP:\triangle CAP$

$=\frac{1}{18}:\frac{1}{6}:\frac{1}{9}$

$=1:3:2$.

［位置ベクトルの係数比の逆数が面積比となる］

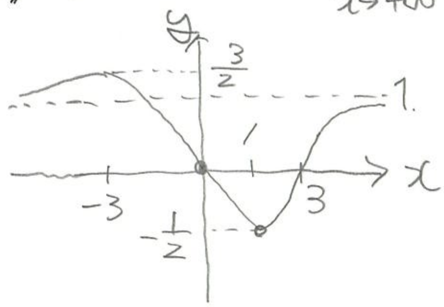
VI (1) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$ より $f'(x)=\frac{3(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

増減表より，極大値は $x=-3$ のとき $f(x)=\frac{3}{2}$，極小値は $x=1$ のとき $f(x)=-\frac{1}{2}$

(2) グラフを描くと，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$.，また $y=f(x)=0$ のとき，

$x=0,3$ となるので

グラフは左図。



このグラフと x 軸とで囲まれる面積は,

$$\int_0^3 -f(x)\,dx = \int_0^3 \left(-\frac{x^2-3x}{x^2+3}\right)dx$$

$$= \int_0^3 \left(-1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3}+\frac{3}{x^2+3}\right)dx$$

$$= \int_0^3 (-1)\,dx + \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \int_0^3 \frac{3}{x^2+3}\,dx$$

$$= \Big[-x\Big]_0^3 + \frac{3}{2}\cdot\Big[\log|x^2+3|\Big]_0^3 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 3\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 3$$

※

全体的に平易だが Ⅲ の三角関数の合成と, Ⅵ の積分 が 手ごわい。

他の問題に注力するか, 他の問題をすばやく仕上げて Ⅲ と Ⅵ で差をつけるか,

どちらかとなる。

良い問題なので, 日大志望者以外も解いて練習するとよいと思う。