医学部専門予備校　クエスト　解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学　試験日 3月 4日（土）

1 問1　$\sin^2\frac{5}{12}\pi=\frac{1-\cos\frac{5}{6}\pi}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$t=\sin\frac{5}{12}\pi$ とおくと

$4t^2-2=\sqrt{3}$

両辺平方して

$16t^4-16t^2+1=0$ …（答）

$(4t^2-1)^2-(2\sqrt{2}t)^2=0$

$(4t^2-2\sqrt{2}t-1)(4t^2+2\sqrt{2}t-1)=0$

$t=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4},\ \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$

すなわち　$t=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ …（答）

問2　$PA=PB=QC=QD$ より

$L=PQ+4QD=2a+4\sqrt{(a-1)^2+1}$

L の最小は図形的に $0<a<1$ でとる.

$\frac{dL}{da}=\frac{2\left(\sqrt{(a-1)^2+1}+2(a-1)\right)}{\sqrt{(a-1)^2+1}}$

$\frac{dL}{da}=0$ とすると　$\sqrt{(a-1)^2+1}=2(1-a)$

両辺平方して　$3(a-1)^2=1$

$0<a<1$ より　$a=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ …（答）

このとき L は最小となり．最小値は $2(1+\sqrt{3})$ …（答）

$\boxed{2}$ 問1. $g(y)=2y^3-3y^2+2y$

$x=2y^3-3y^2+2y$ とすると

$$\frac{dx}{dy}=6y^2-6y+2$$

であり $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{6y^2-6y+2}$ …①

$y=g(x) \Leftrightarrow x=2y^3-3y^2+2y$

だから $8=2y^3-3y^2+2y$

すなわち $(y-2)(2y^2+y+4)=0$

yは実数だから $y=2$ よって $g(8)=2$ …(答)

①で $y=2$ とすると $g'(8)=\dfrac{1}{14}$ …(答)

問2. $y=g(x)$ と $y=x$ の交点は

$x=2y^3-3y^2+2y$ と $x=y$ の交点で

$2y^3-3y^2+2y=y$ $\therefore y(2y-1)(y-1)=0$

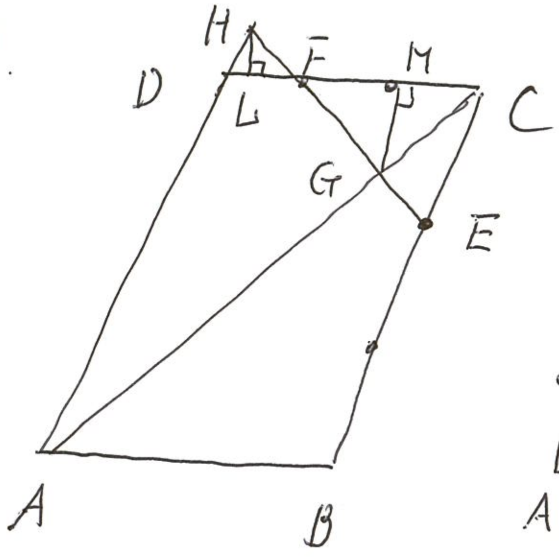
$x=y$ より交点のx座標は $0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$ …(答)

問3. $x=2y^3-3y^2+2y$ と $x=y$ で囲まれた面積

を求めればよく、点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$について対称であることを考えて、

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}(2y^3-3y^2+y)dy=\frac{1}{16}$$ …(答)

3 問1.



$\triangle FCE \backsim \triangle FDH$

であり,

$DH : CE = DF : CF = 1 : 2$

より

$DH = 1$

$AD = 6$ だから

$$\frac{DH}{AD} = \frac{1}{6} \cdots (答)$$

問2. $\triangle GCE \backsim \triangle GAH$ より

$$\frac{GC}{AG} = \frac{CE}{AH} = \frac{2}{7} \cdots (答)$$

問3. $\triangle AGH$ と直線 CD についてメネラウスの定理

を用いると.

$$\frac{AD}{DH} \times \frac{HF}{FG} \times \frac{GC}{CA} = 1$$

問2より $\dfrac{GC}{CA} = \dfrac{GC}{GC+AG} = \dfrac{2}{9}$ だから

$$\frac{HF}{FG} = \frac{3}{4} \cdots (答)$$

問4. 図のように, L, M をとる. 問1より

$$HL = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

問3 より $GM = HL \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{9}$

よって $\triangle CFG = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \times \dfrac{10}{9} = \dfrac{10}{9} \cdots (答)$

$\boxed{4}$ 問1. k, l を0以上の整数とする.

「乙卯」の年は十干が2番目, 十二支が4番目

だから. $2+10k=4+12l$

$5k-6l=1$

をみたす k, l を考える. これを変形して.

$5(k+1)=6(l+1)$

より. M を自然数として $k+1=6M, l+1=5M$

と表され. $2+10k=60M-8$

これをみたす最小の M は $M=1$ で このとき $2+10k=52$

よって「甲子」の年を1年目としたときの52年目だから.

51年後 …(答)

問2. 十干十二支は10と12の最小公倍数を考えて.

60年周期である.

$645+60\times 23=2025$

より 645年と2025年は十干十二支は同じで「乙巳」の年

である. 問1と同様に「乙巳」の年は

$2+10k=6+12l \iff 5(k+2)=6(l+2)$

N を自然数として $k=6N-2, l=5N-2$

よって $2+10k=60N-18$

これに近い「甲子」の年は $60N+1$ と表されるから.

$645+19=664$(年) …(答)

〈講評〉

[1] 問1. 半角の公式を用いる標準問題である。

問2. 平面上の折れ線の長さの最小を求める標準問題で、L を a で表し微分にもちこめばよい。図より $0<a<1$ であるから、ここで極値を考えればよい。

[2] 逆関数の微分および逆関数を用いた面積を求める問題で、慣れていないと手が付きにくい問題である。

$y=g(x) \iff x=2y^3-3y^2+2y$ を用いることになる。

[3] 平面図形に関する標準問題で相似やメネラウスの定理を用いればよい。

[4] 十干十二支を用いた整数問題で、60年周期であることに着目していくことになる。題意を正しくつかむことが重要である。