

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

杏林大学医学部 数学 試験日1月19日(金)



I $C: x^2 + y^2 = 10$

$L: y = a(x-4) + 2$

(a) L は 定点 $F(4, 2)$ を通る

直線 PQ は F を極とする

C の極線であるから、

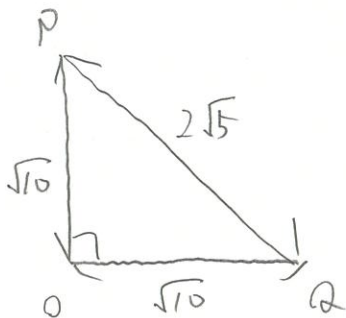
直線 $PQ: 4x + 2y = 10$
 $(2x + y - 5 = 0)$

<証明>

(直線 PQ 上の任意の点 $X(x, y)$ について)
 $\vec{OX} \cdot \vec{OF} = \vec{OP} \cdot \vec{OF} = \vec{OQ} \cdot \vec{OF} = 10$

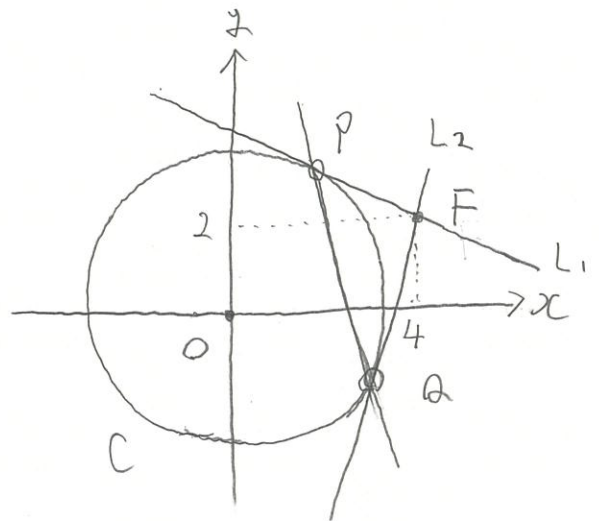
直線 PQ と O の距離 = $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

三平方の定理より、弦 $PQ = 2\sqrt{5}$

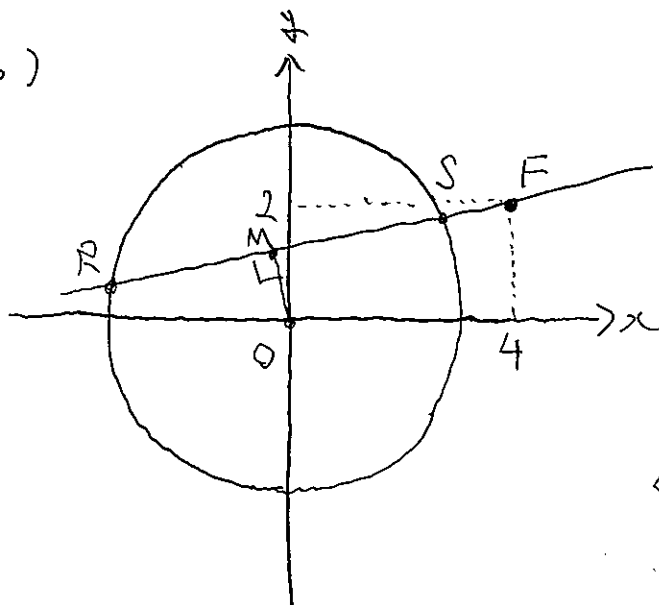


したがって、 $\angle POQ = 90^\circ$ より、

弧 $PQ = 2\sqrt{10}\pi \times \frac{90}{360} = \frac{\sqrt{10}}{2}\pi$



(b)



$$L: ax - y + (-4a + 2) = 0 \text{ と}$$

$$C: x^2 + y^2 = 10 \text{ が}$$

異なる2点で交わるから、

$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 - 16a + 4 \leq 10(a^2 + 1) \text{ より、}$$

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{FM} = 0$$

$$\angle OMF = 90^\circ \text{ より、}$$

点Mが描く軌跡は

線分FOを直径とする円の一部である。

$$OM = \frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \left(-\frac{1}{3} \leq a \leq 3\right) = A \text{ とすると、}$$

$$\text{三平方の定理より、} RS = 2\sqrt{10 - A^2}$$

$$\begin{aligned} \triangle ORS &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10 - A^2} \cdot A = \sqrt{10A^2 - A^4} \\ &= \sqrt{-(A^2 - 5)^2 + 25} \end{aligned}$$

$A = \sqrt{5}$ に対応する a が $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$ にあるか調べる。

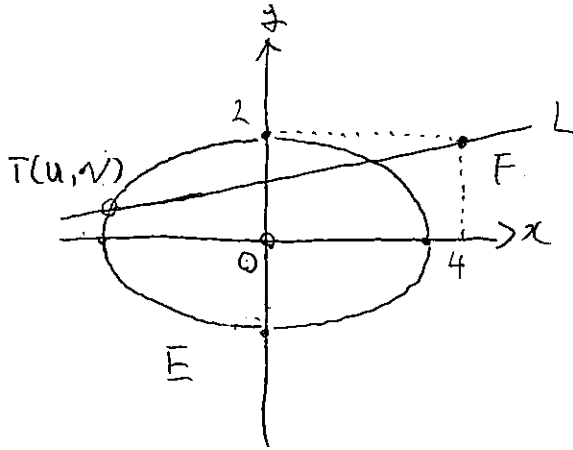
$$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad 16a^2 - 16a + 4 = 5(a^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \quad \text{は} \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 3 \text{ を満たす。}$$

したがって、 $A = \sqrt{5}$ のとき、 $\triangle ORS = 5$ (最大)

$$(C) \quad L: y = a(x-4) + 2$$

$$E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$$\vec{\alpha} = \left(\frac{u}{\sqrt{10}}, \frac{v}{2} \right) \quad \vec{\beta} = (\sqrt{10}a, -2)$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = au - v$$

$$\left(\begin{array}{l} T(u, v) \text{ は } L \text{ 上にあるから,} \\ v = a(u-4) + 2 \end{array} \right)$$

$$= 4a - 2$$

T は E 上にあるから、

$$|\vec{\alpha}|^2 = \frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{4} = 1 \text{ より、} |\vec{\alpha}| = 1$$

$$\text{また、} |\vec{\beta}|^2 = 10a^2 + 4$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \text{ より、}$$

$$(4a - 2)^2 \leq 10a^2 + 4 \iff 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

$$a = 0 \text{ のとき、} \underline{T(0, 2)} \quad L: y = 2$$

このとき、 L が C によりとけり取られた部分の長さは、 $2\sqrt{6}$

$$\text{II} \quad C: y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1 \quad (= f(x))$$

$$\Gamma \begin{cases} x = s - 1 + \frac{2}{e^{2s} + 1} \\ y = \frac{2e^s}{e^{2s} + 1} - 1 \end{cases}$$

(a) $s = \log 3$ に対応する Γ 上の点は、 $P(\log 3 - \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$
 Γ について、

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = 1 - \frac{4e^{2s}}{(e^{2s} + 1)^2} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{2e^s(1 - e^{2s})}{(e^{2s} + 1)^2} \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2e^s}{1 - e^{2s}}$$

P における Γ の接線の傾きは、 $-\frac{3}{4}$ より、

P における Γ の法線を L とすると、

$$L: y = \frac{4}{3} \left\{ x - \left(\log 3 - \frac{4}{5} \right) \right\} - \frac{2}{5}$$

$$L: y = \frac{4}{3}(x - \log 3) + \frac{2}{3}$$

(b) C について、 $x = \log 3$ のとき、 $y = \frac{2}{3}$ $Q(\log 3, \frac{2}{3})$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \text{ より、 } f'(\log 3) = \frac{4}{3}$$

したがって、 L は Q における C の 接線 である。

(C) 曲線 OQ の長さを求めよ。

$$d = \int_0^{\log 3} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \int_0^{\log 3} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^{\log 3} \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_0^{\log 3} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^{\log 3} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} [e^x]_0^{\log 3} - \frac{1}{2} [e^{-x}]_0^{\log 3}$$

$$= \frac{1}{2} (3 - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

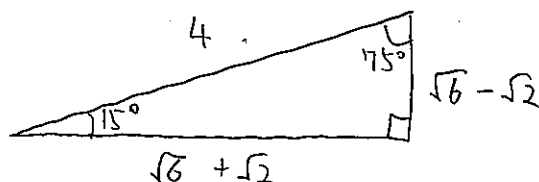
$$PQ = \frac{4}{3} \text{ 点}, \quad \frac{d}{PQ} = \frac{1}{\text{点}}$$

$$\text{III} \quad \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

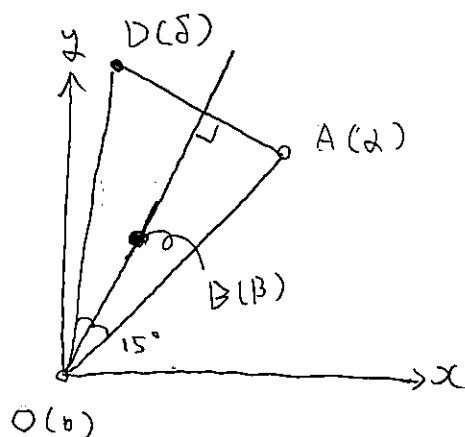
$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$(a) \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}i$$



$$s = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}, \quad t = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}, \quad |\gamma| = \frac{1}{2}, \quad \arg \gamma = \frac{\pi}{12}$$



左図より、 $\vec{OB}$ と $\vec{AD}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\arg \frac{s - \alpha}{\beta - 0} = \frac{\pi}{2}$$

0 を中心に A を $\frac{\pi}{6}$ 回転した点が D なのより、

$$s = \alpha \times \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \alpha \times \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$(b) \quad \gamma^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos \frac{n}{12} \pi + i \sin \frac{n}{12} \pi \right)$$

γ^n が純虚数になるとき、

$$\frac{n}{12} \pi = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (k \text{ は自然数})$$

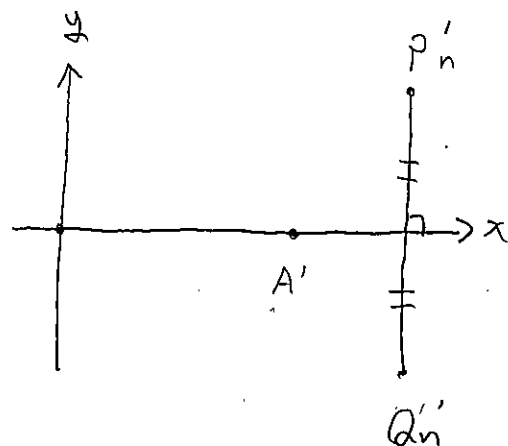
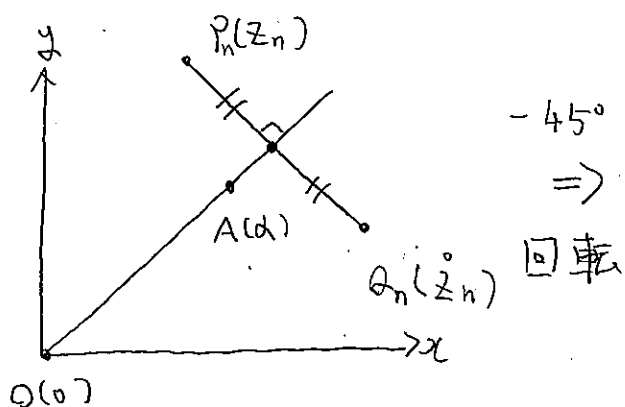
$\Leftrightarrow n = 12k - 6$ より、最小の n は $\underline{6}$

$$|\gamma^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ より、} |\gamma^{-n}| = 2^n$$

$$2^{10} = 1024, \quad 2^{11} = 2048 \text{ より、}$$

$$|\gamma^{-n}| > 2024 \text{ を満たす最小の } n \text{ は } \underline{11}$$

(c)



P'_n に対応する複素数は、

$$z_n \times \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

Q'_n に対応する複素数は、

$$\dot{z}_n \times \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \dot{z}_n = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} z_n \text{ より、}$$

$$\dot{z}_n = i \bar{z}_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} z_1 = \beta \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + \gamma (\dot{z}_n - z_n) \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

①③ より、

$$\dot{z}_{n+1} = i \bar{z}_{n+1}$$

$$= i \{ \bar{z}_n + \gamma (\dot{z}_n - z_n) \}$$

$$= i \{ \bar{z}_n + \gamma (-i z_n - \bar{z}_n) \}$$

$$= i \bar{z}_n + \gamma z_n - \gamma i \bar{z}_n$$

$$= \dot{z}_n + \gamma (z_n - \dot{z}_n)$$

したがって、

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + \sqrt{1-i}(z_n^0 - z_n) \\ z_{n+1}^0 = z_n^0 - \sqrt{1-i}(z_n^0 - z_n) \end{cases} \text{より、... ④}$$

$$z_{n+1}^0 - z_{n+1} = (z_n^0 - z_n) - (1 + \sqrt{1-i})(z_n^0 - z_n)$$

$$(1 + \sqrt{1-i} = \text{虚数部} \times 2 = 2S)$$

$$= (1 - 2S)(z_n^0 - z_n) \text{ より、}$$

$$|z_{n+1}^0 - z_{n+1}| = (1 - 2S)|z_n^0 - z_n|$$

$$\begin{aligned} \text{① ② より、 } z_1^0 - z_1 &= i\bar{\beta} - \beta = i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \end{aligned}$$

$$|z_1^0 - z_1| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \text{ であるから、}$$

$|z_n^0 - z_n|$ は初項 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 、公比 $(1-2S)$ の等比数列であるから、

$$|z_n^0 - z_n| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} (1-2S)^{n-1}$$

$$0 < 1-2S < 1 \text{ であるから、 } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n^0 - z_n| = 0$$

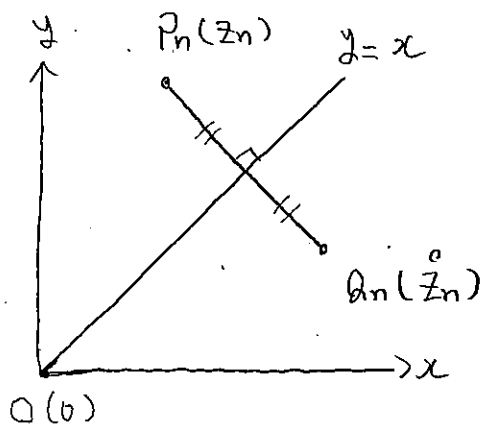
これは n が大きくなるといっていいから、

$p_n(z_n)$ と $q_n(z_n^0)$ が近づいていくとき、

$n \rightarrow \infty$ とするとき一致するを示さなければならない。

(p_∞ と q_∞ は直線 OA 上にある、)

$$\text{したがって、 } \lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \frac{\pi}{4}$$

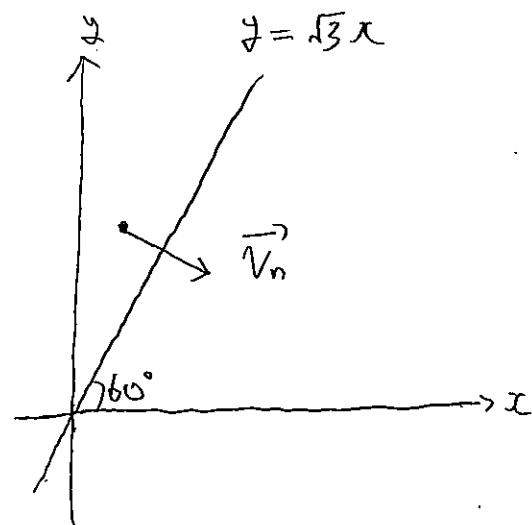
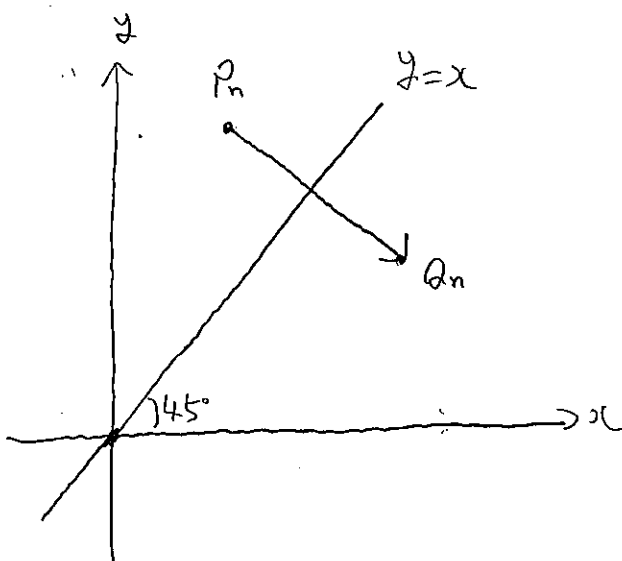


$$\begin{cases} z_1 = \beta \\ z_{n+1} = z_n + i(z_n - z_n) \end{cases}$$

$$\vec{OP_1} = \vec{OB}$$

$(z_n - z_n)$ は $\vec{P_nQ_n}$ に対応する複素数であり、

$i(z_n - z_n)$ は $\vec{P_nQ_n}$ を原点を中心に $\frac{1}{2}$ 倍し、 $\frac{\pi}{12}$ 回転したベクトル ($\vec{V_n}$ とする) に対応する複素数である。



$$z_{n+1} = z_n + i(z_n - z_n) \text{ より、}$$

$$\vec{OP_{n+1}} = \vec{OP_n} + \vec{V_n} \text{ である、}$$

$$\vec{OP_n} = \vec{OP_1} + \vec{V_1} + \vec{V_2} + \dots + \vec{V_{n-1}} \text{ であり、}$$

$\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots, \vec{V_{n-1}}$ は直線 $y = \sqrt{3}x$ に直交する。

したがって、 P_n は B を通り傾き $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ の直線 L 上にあり、

$$L: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

L と実軸のなす角は $\frac{\pi}{6}$

① より、

$$\arg z_n^\circ = \arg i \bar{z}_n = \arg i + \arg \bar{z}_n$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arg z_n \text{ より、}$$

$$\arg z_n + \arg z_n^\circ = \frac{\pi}{2}$$

L と $y = x$ を連立すると、

$$(x, y) = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1) \text{ となるため、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{25}$$

講評。「必ず正答したい問題」を全て取り、

「差がつく問題」のどちらかを正答できれば十分ではないが。

Ⅰ (a) 必ず正答したい問題

円の極線の知識があると有利

(b) 差がつく問題

$\triangle ORS$ の面積の最大値については、

何を変数とするかによって計算量に差が出る。

(c) 必ず正答したい問題

題意を把握するのが難しいが、

誘導に従って計算するだけである。

Ⅱ 必ず正答したい問題

何のひねりもない計算問題である。

曲線の長さの計算では双曲線関数の知識があることや有利か。

Ⅲ (a) 差がつく問題

15° の三角比の知識があるかどうか、

複素数の計算の図形的意味を円周から

意識できているかどうかで計算量に

かなりの差が出る。

(b) 必ず正答したい問題

ド・モアブルの定理に関する、なんのひねりもない問題である。

(c) やや難

線対称な2つの複素数と、複素数列の融合問題。

類題を解いたことがない人には難しかったろう。