

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本医科大学 数学 試験日2月1日(木)



[I] 問1. $\alpha < \angle AOB < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \frac{\pi}{2} < \cos \angle AOB < \cos \alpha$

($\pi/2$ 弧度, $0 < x < \frac{2}{3}$ ($\frac{\pi}{3}$))

問2. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおく. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6x$

$\vec{OH} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ (α, β は実数) とおく

$$\begin{cases} \vec{BH} \perp \vec{OA} \\ \vec{AH} \perp \vec{OB} \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \vec{BH} \cdot \vec{OA} = 0 \\ \vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{BH} \cdot \vec{OA} = \{\alpha \vec{a} + (\beta - 1) \vec{b}\} \cdot \vec{a} = \alpha |\vec{a}|^2 + (\beta - 1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4\alpha + 6x(\beta - 1) = 0$$

$$\therefore 2\alpha + 3x\beta = 3x \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{OB} = \{\alpha - 1 \vec{a} + \beta \vec{b}\} \cdot \vec{b} = (\alpha - 1) \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta |\vec{b}|^2 = 6x(\alpha - 1) + 9\beta = 0$$

$$\therefore 2x\alpha + 3\beta = 2x \quad \text{--- (2)}$$

① ② を連立して解く

$$\alpha = \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}, \quad \beta = \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}$$

よって $\vec{OH} = \frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)} \vec{OA} + \frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)} \vec{OB}$ ($\frac{x}{3}$)

問3. $\triangle OAB$ の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 9 - (6x)^2} = 3 \sqrt{1-x^2}$$

直線 OH と直線 AB の交点を P とする。 O, H, P は一直線上より

$$\vec{OP} = t\vec{OH} = \alpha t \vec{a} + \beta t \vec{b} \quad (t: \text{実数})$$

と表わすことができる。

ここで、 A, P, B は一直線上より $\alpha t + \beta t = 1$

$$\text{すなわち } t = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{6(1-x^2)}{x(13-12x)}$$

ここで、 $t-1 = \frac{6x^2-13x+6}{x(13-12x)}$ と表わす。

$$\frac{PH}{OP} = \frac{t-1}{t} = \frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S(x) &= \frac{PH}{OP} \cdot \Delta OAB = \frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)} \cdot 3\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{6x^2-13x+6}{2\sqrt{1-x^2}} \quad \left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

問4.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{(12x-13)\sqrt{1-x^2} - (6x^2-13x+6) \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{2(1-x^2)} \\ &= \frac{(12x-13)(1-x^2) + x(6x^2-13x+6)}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-6x^3+18x-13}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = -6x^3+18x-13$ とおく。 $0 < x < \frac{2}{3}$ において

$$f'(x) = -(18x^2)+18 = 18(1-x^2) > 0$$

であるので、 $f(x)$ は単調増加する。

$$\text{ここで、 } f\left(\frac{2}{3}\right) = -6 \cdot \frac{8}{27} + 18 \cdot \frac{2}{3} - 13 = -\frac{16}{9} + 12 - 13 = -\frac{25}{9} < 0$$

であるので、 $0 < x < \frac{2}{3}$ において、 $f(x) < 0$ である。

よって、 $0 < x < \frac{2}{3}$ で $S'(x) < 0$ であるので、 $S(x)$ は単調に減少する。

したがって、 (い) (答)

[II] 問1. $p_{m,n}(k) = {}_m C_k \left(\frac{n}{m+n}\right)^k \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}$ であるから、

$$\begin{aligned} q_{m,n} &= \sum_{k=0}^m 2^k \cdot p_{m,n}(k) = \sum_{k=0}^m 2^k \cdot {}_m C_k \cdot \frac{n^k m^{m-k}}{(m+n)^m} \\ &= \frac{1}{(m+n)^m} \sum_{k=0}^m {}_m C_k (2n)^k m^{m-k} = \frac{1}{(m+n)^m} (2n+m)^m \end{aligned}$$

$$\therefore q_{m,n} = \left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^m \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

問2. $q_{m,n} > 0$ は明らかであり、

$$\begin{aligned} \log q_{m,n} &= \log \left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^m = \log \left(1 + \frac{n}{m+n}\right)^m = \log \left(1 + \frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n} \cdot \frac{mn}{m+n}} \\ &= \frac{mn}{m+n} \log \left(1 + \frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{1 + \frac{n}{m}} \log \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{n} + 1}\right)^{\frac{m}{n} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{I, 2. } \lim_{m \rightarrow \infty} \log q_{m,n} = n \log e = \log e^n \quad (\because \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ I})$$

$\therefore$ $y = \log x$ は連続関数であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_{m,n} = e^n \quad \therefore R_n = e^n \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

問3. $S_n(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{m,n}(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_m C_k \left(\frac{n}{m+n}\right)^k \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{k! (m-k)!} \cdot \frac{n^k \cdot m^{m-k}}{(m+n)^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{m}{m+n}\right)^m \cdot \frac{n^k}{m^k}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{n}{m}}\right)^m \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdots \frac{m-k+1}{m}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{m}\right)^m} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$$

$$\therefore \text{I. } \log \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m = n \log \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ 2. } \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m = n \log e = \log e^n$$

$$y = \log x \text{ は連続関数であるから } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{m}\right)^m = e^n$$

$$\text{I, 2. } S_n(k) = \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{1}{e^n} = \frac{n^k}{k! e^n} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

問4. $S_n(3) = \frac{n^3}{6e^n}$ とあるから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N R_n \cdot S_n(3) \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^4} \sum_{n=1}^N e^n \cdot \frac{n^3}{6e^n} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6N^4} \sum_{n=1}^N n^3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6N^4} \cdot \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^2 = \frac{1}{24} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

[III] 問1. $\begin{cases} (e^{-ax} \sin x)' = -ae^{-ax} \sin x + e^{-ax} \cos x & \text{--- (1)} \\ (e^{-ax} \cos x)' = -ae^{-ax} \cos x - e^{-ax} \sin x & \text{--- (2)} \end{cases}$

①×a+②より $\{e^{-ax}(a \sin x + \cos x)\}' = -(a^2+1)e^{-ax} \sin x$

よって, $\int e^{-ax} \sin x dx = -\frac{1}{a^2+1} e^{-ax} (a \sin x + \cos x) + C$ (Cは積分定数)

よって,

$$K(a) = \left[-\frac{1}{a^2+1} e^{-ax} (a \sin x + \cos x) \right]_0^\pi = -\frac{1}{a^2+1} e^{-\pi a} \cdot (-1) + \frac{1}{a^2+1}$$

$$\therefore K(a) = \frac{e^{-\pi a} + 1}{a^2+1} \quad \left(\frac{9}{10} \right)$$

問2. $n \rightarrow \infty$ のとき $-\frac{b}{n} \rightarrow -0$ とおくと, $f(x) = e^x$ とおく.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-\frac{b}{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \frac{e^{-\frac{b}{n}} - 1}{-\frac{b}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \frac{f(-\frac{b}{n}) - f(0)}{-\frac{b}{n} - 0} \\ &= b \cdot f'(0) = b \cdot e^0 = b \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-\frac{b}{n}}) = b \quad \left(\frac{10}{10} \right) \end{aligned}$$

問3. $n(x - n\pi) = t$ とおくと $x = \frac{t}{n} + n\pi$ とおく.

$$dx = \frac{1}{n} dt \quad \begin{array}{c|c} x & n\pi \longrightarrow (n+1)\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow n\pi \end{array} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin(nx)| dx = \int_0^{n\pi} e^{-\frac{t}{n} - n\pi} |\sin(t + n^2\pi)| \frac{1}{n} dt \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{n} \int_0^{n\pi} e^{-\frac{t}{n}} |(-1)^{n^2} \sin t| dt = \frac{e^{-n\pi}}{n} \int_0^{n\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| dt \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| dt \quad \left(\begin{array}{l} (k-1)\pi \leq x \leq k\pi \text{ において,} \\ \left\{ \begin{array}{l} k \text{ が奇数ならば } \sin x \geq 0 \\ k \text{ が偶数ならば } \sin x \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right) \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \cdot (-1)^{k-1} \sin t dt \end{aligned}$$

よって, $u = t - (k-1)\pi$ とおくと $t = u + (k-1)\pi$ とおく.

$$dt = du \quad \begin{array}{c|c} t & (k-1)\pi \longrightarrow k\pi \\ \hline u & 0 \longrightarrow \pi \end{array} \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{e^{-n\pi}}{h} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{h} - \frac{(k-1)\pi}{h}} \cdot \sin\{u + (k-1)\pi\} du \\
 &= \frac{e^{-n\pi}}{h} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot e^{-\frac{(k-1)\pi}{h}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{h}} \cdot (-1)^{k-1} \sin u du \\
 &= \frac{e^{-n\pi}}{h} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{(k-1)\pi}{h}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{h}} \sin u du \\
 &= \frac{e^{-n\pi}}{h} \cdot k\left(\frac{1}{h}\right) \cdot \sum_{k=1}^n e^{-\frac{\pi}{h}(k-1)} = \frac{e^{-n\pi}}{h} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{h}} + 1}{\left(\frac{1}{h}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1 - (e^{-\frac{\pi}{h}})^n}{1 - e^{-\frac{\pi}{h}}} \\
 &= \frac{n}{n^2 + 1} \cdot e^{-n\pi} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \cdot (1 - e^{-\pi}) \\
 \therefore I_n &= (1 - e^{-\pi}) \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \cdot e^{-n\pi} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \quad \left(\frac{3}{5}\right)
 \end{aligned}$$

問4. $0 \leq |\cos(nx)| \leq 1$ より

$$\frac{|\sin(nx)|}{e^x + 1} \leq \frac{|\sin(nx)|}{e^x + |\cos(nx)|} \leq \frac{|\sin(nx)|}{e^x}$$

$$\text{よって } \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot e^{-x} |\sin(nx)| \leq \frac{|\sin(nx)|}{e^x + |\cos(nx)|} \leq e^{-x} |\sin(nx)|$$

$\Rightarrow$ $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ において、 $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ は増加関数より

$$\frac{1}{1 + e^{-n\pi}} \leq \frac{1}{1 + e^{-x}} \leq \frac{1}{1 + e^{-(n+1)\pi}}$$

したがって

$$\frac{1}{1 + e^{-n\pi}} \cdot e^{-x} |\sin(nx)| \leq \frac{|\sin(nx)|}{e^x + |\cos(nx)|} \leq e^{-x} |\sin(nx)|$$

よって $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ 上で積分すると

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + e^{-n\pi}} \cdot e^{-x} |\sin(nx)| dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(nx)|}{e^x + |\cos(nx)|} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin(nx)| dx$$

$$\text{したがって } \frac{1}{1 + e^{-n\pi}} I_n \leq J_n \leq I_n$$

$$\therefore \frac{e^{n\pi}}{1 + e^{-n\pi}} I_n \leq e^{n\pi} J_n \leq e^{n\pi} I_n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\pi} I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\pi}) \cdot \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\pi}) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{n}}}{n(1 - e^{-\frac{\pi}{n}})} \\
 &= (1 - e^{-\pi}) \cdot \frac{1 + 1}{\pi} = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \quad \left(\because \text{p.2.2.1} \right. \\
 &\quad \left. \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-\frac{\pi}{n}}) = \pi \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{また、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n\pi}}{1 + e^{-n\pi}} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-n\pi}} \cdot e^{n\pi} I_n = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi})$$

よ、2. はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\pi} J_n = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi}) \quad \left(\frac{2}{\pi} \right)$$

[N] 問 1. $-tx + \sqrt{1+t^2} z = 1 \quad (\frac{h}{2})$

問 2. $C_2: \frac{x^2}{\frac{1}{h^2}} + \frac{y^2}{\frac{h+1}{h^2}} = 1$ において, $\frac{h+1}{h^2} > \frac{1}{h^2}$ より
 焦点は y 軸上にあり, $\sqrt{\frac{h+1}{h^2} - \frac{1}{h^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ より $F(0, \frac{1}{\sqrt{h}}, 0)$

よって, 平面 π の方程式は

$$-tx + \sqrt{h} y + \sqrt{1+t^2} z = 1 \quad (\frac{h}{2})$$

問 3. L_1 と $x=z$ を連立して解くと

$$-tx + \sqrt{1+t^2} x = 1 \quad \text{より} \quad x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2} - t} = \sqrt{1+t^2} + t$$

$$\therefore Q(t + \sqrt{1+t^2}, 0, t + \sqrt{1+t^2})$$

L_1 と $x = -z$ を連立して解くと

$$tz + \sqrt{1+t^2} z = 1 \quad \text{より} \quad z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + t} = \sqrt{1+t^2} - t$$

$$\therefore R(t - \sqrt{1+t^2}, 0, -t + \sqrt{1+t^2})$$

よって, $QR = \sqrt{(t - \sqrt{1+t^2} - t - \sqrt{1+t^2})^2 + (-t + \sqrt{1+t^2} - t - \sqrt{1+t^2})^2}$
 $= \sqrt{(-2\sqrt{1+t^2})^2 + (-2t)^2} = 2\sqrt{1+2t^2} \quad (\frac{h}{2})$

直線 L_2 の方程式は

$$\begin{cases} -tx + \sqrt{h} y + \sqrt{t^2+1} z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -tx + \sqrt{h} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

よって, x は平面上で, 直線 $y = \frac{t}{\sqrt{h}}x + \frac{1}{\sqrt{h}}$ と楕円 C_2 の共通点の x 座標が満たす方程式は

$$h^2 x^2 + \frac{h^2}{h+1} \cdot \frac{(tx+1)^2}{h} = 1$$

$$h^2(h+1)x^2 + h(t^2x+2t)(x+1) = h+1$$

$$\therefore (ht^2 + h^3 + h^2)x^2 + 2htx - 1 = 0 \quad \text{--- ①}$$

①の2解を α, β とて、2点S, Tのx座標をそれぞれ α, β とすると、
($\alpha < \beta$)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-2t}{t^2 + h^2 + h} \\ \alpha\beta = \frac{-1}{h(t^2 + h^2 + h)} \end{cases} \quad (\because \text{解と係数の関係より})$$

よ、 $\beta - \alpha$

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{-2t}{t^2 + h^2 + h} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-1}{h(t^2 + h^2 + h)} \\ &= \frac{4ht^2 + 4(t^2 + h^2 + h)}{h(t^2 + h^2 + h)^2} = \frac{4(h+1)t^2 + 4h(h+1)}{h(t^2 + h^2 + h)^2} \\ &= \frac{4(h+1)(t^2 + h)}{h(t^2 + h^2 + h)^2} \quad \therefore \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{h+1} \cdot \sqrt{t^2 + h}}{\sqrt{h}(t^2 + h^2 + h)} \end{aligned}$$

$y = \frac{t}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{h}}$ 上の点より、

$$\begin{aligned} ST &= (\beta - \alpha) \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{h}} \right)^2} = \frac{2\sqrt{h+1} \cdot \sqrt{t^2 + h}}{\sqrt{h}(t^2 + h^2 + h)} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + h}}{\sqrt{h}} \\ &= \frac{2\sqrt{h+1}(t^2 + h)}{h(t^2 + h^2 + h)} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{h}} \right) \end{aligned}$$

問4. $f_h(t) = \frac{ST}{QR} = \frac{2\sqrt{h+1}(t^2 + h)}{h(t^2 + h^2 + h)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+2t^2}}$

$$\therefore f_h(t) = \frac{\sqrt{h+1}}{h} \cdot \frac{t^2 + h}{(t^2 + h^2 + h)\sqrt{2t^2 + 1}}$$

$f_h(t) > 0$ であるから

$$\log f_h(t) = \log \frac{\sqrt{h+1}}{h} + \log(t^2 + h) - \log(t^2 + h^2 + h) - \frac{1}{2} \log(2t^2 + 1)$$

両辺を t で微分して

$$\begin{aligned} \frac{f_h'(t)}{f_h(t)} &= \frac{2t}{t^2 + h} - \frac{2t}{t^2 + h^2 + h} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4t}{2t^2 + 1} \\ &= 2t \left(\frac{1}{t^2 + h} - \frac{1}{t^2 + h^2 + h} - \frac{1}{2t^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $g_h(t) = \frac{1}{t^2+h} - \frac{1}{t^2+h^2+h} - \frac{1}{2t^2+1}$ とおく

$f_h'(t) = 2t f_h(t) g_h(t)$ であるから、 $f_h(t)$ が極値をとるための必要十分条件は、 $g_h(t)$ が $t > 0$ で符号変化する点である。

このとき $g_h(t) = \frac{(t^2+h^2+h)(2t^2+1) - (t^2+h)(t^2+1) - (t^2+h)(t^2+h^2+h)}{(t^2+h)(t^2+h^2+h)(2t^2+1)}$

この分子を $h_h(t)$ とおくと

$$h_h(t) = -t^4 + (h^2 - 2h)t^2 - h^3$$

よって、 $t^2 = u$ とおいて、

$$p_h(u) = u^2 - (h^2 - 2h)u - h^3$$

が $u > 0$ の範囲で符号変化する条件を求めればよい。

そのためには、方程式 $p_h(u) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことが必要であるので、判別式を D とおくと

$$D = (h^2 - 2h)^2 - 4h^3 = h^4 - 8h^3 + 4h^2 = h^2(h^2 - 8h + 4) > 0$$

$$h > 0 \text{ より } h < 4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3} < h \quad \text{--- (2)}$$

そこで、 $p_h(u) = 0$ の 2 解を γ, δ とおくと

$$\begin{cases} \gamma + \delta = h^2 - 2h \\ \gamma\delta = h^3 \end{cases}$$

ここで、 $\gamma\delta = h^3 > 0$ より 2 解は同符号なはず。

正の解をもつ条件は $\gamma + \delta = h^2 - 2h > 0$

すなわち $h < 0, 2 < h$ --- (3)

よって、(2) か (3) が求める条件より

$$h > 4 + 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$