

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本大学医学部 数学 試験日2月1日(木)



I. (1) $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ に 余弦定理 を 用いる. $\angle BAD = \theta$ とおくと.

$$\angle BCD = 180^\circ - \theta \quad \text{より}$$

$$BD^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \theta$$

$$BD^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 (-\cos \theta)$$

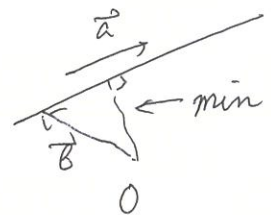
$$\therefore \text{これを解いて, } \cos \angle BAD = \cos \theta = -\frac{1}{3}, \quad BD = \sqrt{17} \quad \text{--- (答)}$$

$$(2) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{より} \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{代入して} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \quad \text{--- (答)}$$

$$(t\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a} \quad \text{のとき} \quad |t\vec{a} + \vec{b}| \text{ は 最小 になる.}$$

$$(t\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{より} \quad t = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4} \quad \text{--- (答)}$$



$$(3) \quad y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{頂点 } x = 2 \quad \text{より} \quad -\frac{a}{2} = 2 \quad \therefore a = -4 \quad \text{--- (答)}$$

$$\text{頂点 は } y = 3x - 1 \text{ 上 に ある ので}$$

$$b - \frac{a^2}{4} = 3\left(-\frac{a}{2}\right) - 1$$

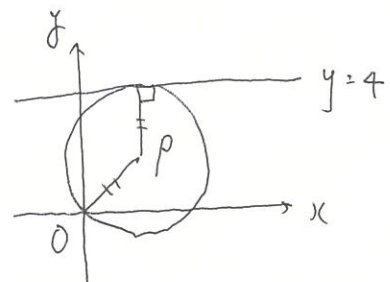
$$b - 4 = 5 \quad \therefore b = 9 \quad \text{--- (答)}$$

$$(4) \quad P(X, Y) \quad (Y < 4) \quad \text{とおくと}$$

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = 4 - Y$$

$$\text{平方して整理すると} \quad Y = -\frac{1}{8}X^2 + 2$$

$$\therefore P \text{ の 軌跡 の 方程式 は } y = -\frac{1}{8}x^2 + 2 \quad \text{--- (答)}$$



$$(5) \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} \right)^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right)^{12}$$

$$= \frac{1}{2^6} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{64} \dots \left(\frac{1}{64} \right)$$

II. (1) $2^x = t$ ($t > 0$), $f(x) = g(t)$ とおくと

$$g(t) = t^2 - 20t + 64 = (t-16)(t-4)$$

$$f(x) \leq 0 \text{ より } (t-16)(t-4) \leq 0 \quad \therefore 4 \leq t \leq 16$$

$$\therefore 2^2 \leq 2^x \leq 2^4 \text{ より } 2 \leq x \leq 4 \quad \dots \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$(2) g(t) = (t-10)^2 - 36$$

$t > 0$ より $g(t)$ がわかる $f(x)$ は $t=10$ のとき最小値 -36 をとる.

$$\dots \left(\frac{1}{6} \right). \quad \text{このとき } 2^x = 10 \text{ より } x = 1 + \log_2 5 \quad \dots \left(\frac{1}{6} \right)$$

III. (1) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおくと.

3点 $(2, 5)$, $(0, -1)$, $(-2, 1)$ を通るから

$$2a + 5b + c = -29$$

$$-b + c = -1$$

$$-2a + b + c = -5$$

これらを用いて, $a = -2$, $b = -4$, $c = -5$

$$\text{円Cの方程式は } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \quad \dots \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$(2) \text{円C: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$\ell: y = mx + n$ とおくと, $(-1, 6)$ を通るから, $6 = -m + n$

より $n = m + 6$ であり. Cの中心 $(1, 2)$ から ℓ までの距離が

$$\sqrt{10} \text{ である } \frac{|m+n-2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \text{ より } |2m+4| = \sqrt{10} \sqrt{m^2+1}$$

両辺 平方して

$$(2m+4)^2 = 10(m^2+1)$$

$$3m^2 - 8m - 3 = 0$$

$$(m-3)(3m+1) = 0$$

傾き最大だから $m=3$, $n=9$

ℓ の方程式は $y=3x+9$... (答)

(3) 接点 は ℓ と ℓ と垂直で中心 $(1, 2)$ を通る直線の交点だから

$$3x+9 = -\frac{1}{3}(x-1)+2$$

$$9x+27 = -x+7 \quad \therefore x = -2$$

接点の座標は $(-2, 3)$... (答)

$$\text{IV (1)} \quad \frac{{}_3C_2 + 2C_1}{{}_5C_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 1回の試行で得点2の確率 $\frac{2}{5}$, 得点1の確率は $\frac{3}{5}$ である。

3回で5点になる確率は 2点 2回, 1点 1回 より

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125} \quad \dots (\text{答})$$

(3) 7回で11点になるのは 2点 4回, 1点 3回 のときだから, その確率は ${}_7C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{35 \cdot 16 \cdot 27}{5^7}$ であり, このうち,

3回までで5点になるとき, 残りの4回で2点2回, 1点2回であればよいから (2) とから 求める確率は

$$\frac{\frac{36}{5^3} \times {}_4C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2}{\frac{35 \cdot 16 \cdot 27}{5^7}} = \frac{36 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 9}{35 \cdot 16 \cdot 27} = \frac{18}{35} \quad \dots (\text{答})$$

V. (1) $a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ から

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = a + 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= a + 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots (\text{答})$$

これは $n=1$ でも成り立つ.

(2) $\{a_n\}$ が等比数列のとき $a + 6 = 0 \therefore a = -6$

$$|a_n| = \left| -6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right| = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \sqrt{|a_n|} = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^8 \sqrt{|a_k|} = \sqrt{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{6} \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{15\sqrt{6}}{16} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

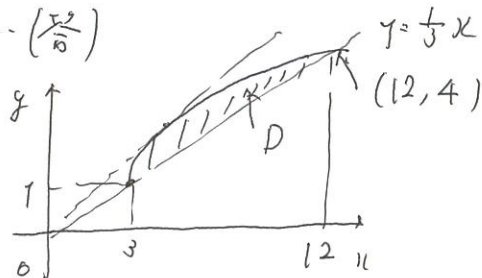
$$= \frac{15\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{8} \quad \dots (\text{答})$$

VI (1) $A(4, 2)$ であり, C について $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ から A に引いた

C の接線の傾きは $\frac{1}{2\sqrt{4-3}} = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$

l が $(3, 1)$ を通るとき $a = \frac{1}{3}$

右図より $\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$



(2) D の面積は

$$\int_3^{12} (\sqrt{x-3} + 1 - \frac{1}{3}x) dx = \left[\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} + x - \frac{x^2}{6} \right]_3^{12} = \frac{9}{2} \quad \dots (\text{答})$$

C: $y = \sqrt{x-3} + 1$ より $x = (y-1)^2 + 3$, l: $y = \frac{1}{3}x$ より $x = 3y$

求める面積は

$$\pi \int_1^4 \{ (3y)^2 - ((y-1)^2 + 3)^2 \} dy$$

$$= \pi \int_1^4 (9y^4 - (y^4 - 2y^3 + y^2 + 3)) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \left[3y^5 - \frac{1}{5}(y-1)^5 - 2(y-1)^3 - 9y \right]_1^4 \\
 &= \pi \left\{ 3(64-1) - \frac{1}{5} \cdot 3^5 - 2 \cdot 3^3 - 9(3-1) \right\} \\
 &= \frac{297}{5} \pi \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(講評)

I. (1) 円に内接する四角形 (基本)

(2) ベクトルの内積 (基本)

(3) 2次関数の決定 (基本)

(4) 軌跡 (基本)

(5) ド・モアブルの定理 (基本)

II. (1) 指数不等式 (2) 指数関数の最小 (基本)

III. (1) 円の方程式の決定 (基本)

(2) 円の接線 (3) 接点の座標 (標準)

IV. (1) (2) 玉を取り出す確率 (1) (基本) (2) (標準)

(3) 条件付き確率 (標準)

V. (1) 階差数列 (2) 数列の和 (標準)

VI. (1) 無理関数と直線の共有点の個数

(2) 無理関数と直線で囲まれた領域の面積, 回転体の体積
(標準)

どれも簡単な問題で, 60分で解ききる計算力の問題
になっている。