昭和大学（医）数学　　試験日 2 月 2 日（金）

1 (1) $x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$$

$\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ より、

$a_n = \alpha^n + \beta^n$ とすると、

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$a_1 = \alpha + \beta = \underline{1}$, $a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \underline{3}$

$a_3 = a_2 + a_1 = \underline{4}$　$a_4 = a_3 + a_2 = \underline{7}$

$$\underline{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geqq 3)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1}$$

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より、$\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

したがって、$-1 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta = \underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $S_1 = (1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)$

$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \underline{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$

$S_2 = \frac{1}{2}\left\{S_1 - (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$

$= \frac{1}{24}n(n+1)\left\{3n(n+1) - 2(2n+1)\right\}$

$= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$

$= \underline{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$

$S_3 = S_2 - \{1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \cdots + (n-1)n\}$

$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2) - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$

$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k$

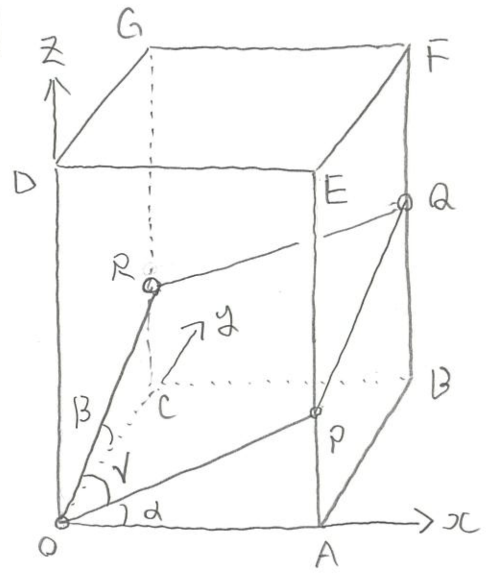
$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{1}{2}n(n-1)$

$= \frac{1}{24}n(n-1)\left\{(n+1)(3n+2) - 4(2n-1) - 12\right\}$

$= \frac{1}{24}n(n-1)(3n^2-3n-6)$

$= \underline{\frac{1}{8}n(n-1)(n+1)(n-2)}$

2



左図のような座標空間を考える。

$P(1,0,\tan\alpha)$　$R(0,1,\tan\beta)$

$OP=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$

$OR=\sqrt{1+\tan^2\beta}$

$PR=\sqrt{1+1+(\tan\beta-\tan\alpha)^2}$

$=\sqrt{2+\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta}$

$$\cos\gamma=\frac{OP^2+OR^2-PR^2}{2OP\cdot OR}=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

四角形 OPQR は平行四辺形より、

$S=2\triangle OPR=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}$

$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$

$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ より

$\tan\alpha\tan\beta=1-(\tan\alpha+\tan\beta)$

$S=\dfrac{7}{6}$ のとき、$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$

$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{13}{36}$

$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\dfrac{85}{36}=0$

$36(\tan\alpha+\tan\beta)^2+72(\tan\alpha+\tan\beta)-85=0$

$\{6(\tan\alpha+\tan\beta)-5\}\{6(\tan\alpha+\tan\beta)+17\}=0$

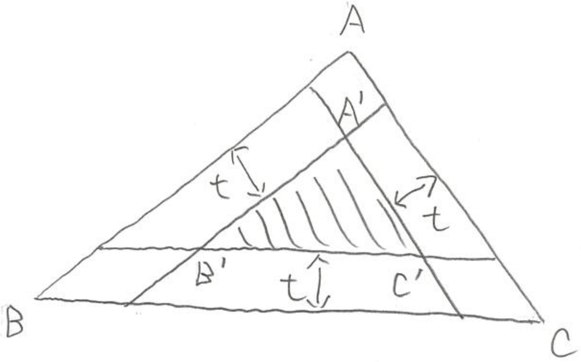
したがって、$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$　$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$

3 (1) $AB=6$, $BC=7$, $CA=5$

$S_1=\sqrt{9\cdot3\cdot2\cdot4}=\underline{6\sqrt{6}}$ （ヘロンの公式）

(2) $S_1=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$ より、$\underline{r=\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

(3)

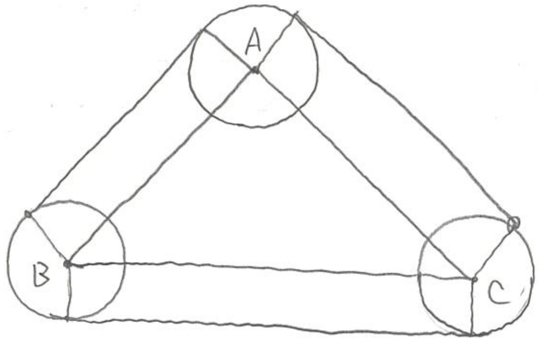


S_2は左図の斜線部の面積である。

$\triangle ABC$と$\triangle A'B'C'$の内心は一致し、

$\triangle A'B'C'$の内接円の半径は$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-t\right)$であるから、

$$S_2=6\sqrt{6}\times\left(\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}-t}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}\right)^2=6\sqrt{6}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2=\underline{\frac{9\sqrt{6}}{4}t^2-18t+6\sqrt{6}}$$



左図の図形の面積は

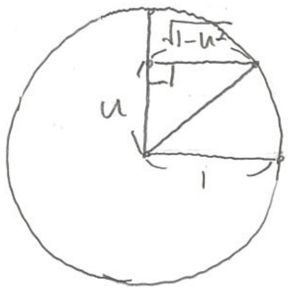
$6\sqrt{6}+6t+7t+5t+\pi t^2$

$=\pi t^2+18t+6\sqrt{6}$

S_3はこれからS_2をひいたものなので、

$$S_3=\underline{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2+36t}$$

(4)



中心が xy 平面上を動く
半径 1 の球面を $z=u$ で切断すると、
半径 $\sqrt{1-u^2}$ の円となる。

したがって、$t=\sqrt{1-u^2}$ として、

$$V=2\int_0^1\left\{\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-u^2)+36\sqrt{1-u^2}\right\}du$$

$$=2\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1+72\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du$$

$$=\frac{4}{3}\left(\pi-\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)+18\pi$$

$$=\underline{\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}}$$

4 スペード，ハート，ダイヤ，クラブのカードが3枚ずつ（J，Q，K）
この中から4枚選ぶ。

$${}_{12}C_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495 \text{ 通り}$$

(1) 例）スペード2枚とハート2枚

$${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9 \text{ 通り}$$

例）スペード3枚とハート1枚

$${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

$$P(2\text{種類}) = \frac{9\times {}_4C_2 + 3\times {}_4P_2}{495} = \frac{54+36}{495} = \frac{90}{495} = \frac{2}{11}$$

(2) 例）スペード2枚とハート1枚とダイヤ1枚

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 27 \text{ 通り}$$

$$P(3\text{種類}) = \frac{27\times 4\times {}_3C_2}{495} = \frac{36}{55}$$

(3) $$P(4\text{種類}) = \frac{({}_3C_1)^4}{495} = \frac{9}{55}$$

(4) 例）Jが2枚とQが1枚とKが1枚

$${}_4C_2 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 96 \text{ 通り}$$

$$P(J,Q,K\text{がそろう}) = \frac{96\times 3}{495} = \frac{32}{55}$$

(5) 例）Jが2枚とQが1枚とKが1枚
かつスペード，ハート，ダイヤ，クラブがそろう

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12 \text{ 通り}$$

P（J，Q，Kとスペード，ハート，ダイヤ，クラブがそろう）

$$= \frac{12\times 3}{495} = \frac{4}{55}$$

＜講評＞

$\boxed{1}$ (1) 必ず正答したい問題.

(2) S_1 と S_2 は必ず正答したい問題。

S_2 を求める問題はやったことがある受験生がほとんどだろう。

S_3 は差がつく問題。

$\boxed{2}$ (1) (2) は必ず正答したい問題。

(3) は $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ から $\tan\alpha+\tan\beta$ と $\tan\alpha\tan\beta$ の関係式を導けたかで差がつきそうである。

$\boxed{3}$ (1) (2) は必ず正答したい問題。

(3) (4) はやや難。

S_2 を求めるのが難しい。(2) が誘導になっている。

$\boxed{4}$ 必ず正答したい問題。

必ず正答したい問題をすべて取り、

差がつく問題のどちらかを正答できれば十分だろう。