

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

順天堂大学 (医) 数学

試験日 2月3日 (土)



$$\boxed{1} (1) A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$A+B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} A-B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \left[\log(\sin x + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって、} A = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \log 2, B = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log 2$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx, D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx$$

$$3C + 2D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} 2C - 3D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx \\ &= \left[\log(2 \sin x + 3 \cos x + 13) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log 15 - \log 16 = \log \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\text{したがって、} C = \frac{3}{26} \pi + \frac{2}{13} \log \frac{15}{16}$$

$$D = \frac{1}{13} \pi - \frac{3}{13} \log \frac{15}{16}$$

(2) 1 個のサイコロを 5 回投げる。

$$P(\text{同じ目が続けて出ない}) = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$$

$$P(\text{同じ目が 2 回以上続けて出る}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

$P(\text{同じ目が 4 回以上続けて出る})$

$$= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 6 = \frac{11}{1296}$$

(例) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \text{なんでも} \\ 1 \text{以外} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\text{同じ目が 3 回以上続けて出る})$

$$= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{6}{6} + \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) \times 6$$

$$= \frac{2}{27}$$

(例) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \text{なんでも} & \text{なんでも} \\ 1 \text{以外} & 1 & 1 & 1 & \text{なんでも} \\ \text{なんでも} & 1 \text{以外} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(3) \quad a_n = \sum_{k=0}^n b^{n-k} c^k = \sum_{k=0}^n b^n \left(\frac{c}{b}\right)^k$$

$$= \frac{b^n - b^n \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{c}{b}} = \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b - c}$$

$$b = 3, c = -2 \text{ の } c \neq$$

$$a_5 = \frac{3^6 - (-2)^6}{3 - (-2)} = \frac{3^6 - 2^6}{3 + 2} = 133 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3} \text{ の } c \neq$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6}{5} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

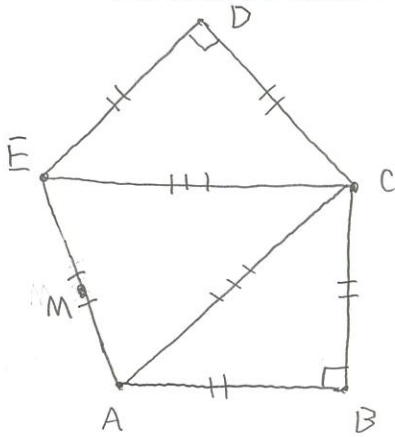
$$= \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N n r^n \quad \text{と置く.} \\ S_N &= r + 2r^2 + 3r^3 + \dots + N r^N \\ r S_N &= r^2 + 2r^3 + \dots + (N-1)r^N + N r^{N+1} \quad \text{より} \\ (1-r) S_N &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^N - N r^{N+1} \\ &= \frac{r - r^{N+1}}{1-r} - N r^{N+1} \\ S_N &= \frac{r - r^{N+1}}{(1-r)^2} - \frac{N r^{N+1}}{1-r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \left\{ \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{4}} - \frac{N \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}} \right\} + \frac{2}{5} \left\{ \frac{-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{\frac{16}{9}} - \frac{N \left(-\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{\frac{4}{3}} \right\} \\ &= \frac{6}{5} - \frac{6}{80} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

II



$$\cos \angle ACE = \frac{2+2-1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \angle ACE = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CDE \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4 + \sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$|\vec{CB}| = |\vec{CB}| = 1,$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CB} = \cos(\angle ACE + 90^\circ) = -\sin \angle ACE = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\vec{CA} = s \vec{CB} + t \vec{CD} \text{ より、}$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{BA} = 0 \text{ より、}$$

$$\vec{CB} \cdot \{(s-1)\vec{CB} + t\vec{CD}\} = 0$$

$$(s-1)|\vec{CB}|^2 + t \vec{CB} \cdot \vec{CD} = 0$$

$$s - \frac{\sqrt{7}}{4} t = 1 \quad (t = \frac{4}{\sqrt{7}}(s-1))$$

$$|\vec{BA}| = 1 \text{ より、}$$

$$|(s-1)\vec{CB} + t\vec{CD}|^2 = 1$$

$$(s-1)^2 |\vec{CB}|^2 + 2(s-1)t \vec{CB} \cdot \vec{CD} + t^2 |\vec{CD}|^2 = 1$$

$$(s-1)^2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} (s-1)^2 + \frac{16}{7} (s-1)^2 = 1$$

$$(s-1)^2 = \frac{7}{9}$$

$$s-1 = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$s = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\text{図より、} s = \frac{3 + \sqrt{7}}{3}, t = \frac{4}{3}$$

$$\vec{CA} = \frac{3+\sqrt{7}}{3} \vec{CB} + \frac{4}{3} \vec{CD}$$

対称性より、 $\vec{CE} = \frac{4}{3} \vec{CB} + \frac{3+\sqrt{7}}{3} \vec{CD}$

$$\vec{CM} = \frac{\vec{CA} + \vec{CE}}{2} = \frac{7+\sqrt{7}}{6} (\vec{CB} + \vec{CD})$$

$$\vec{MB} = \vec{CB} - \vec{CM} = -\frac{1+\sqrt{7}}{6} \vec{CB} - \frac{7+\sqrt{7}}{6} \vec{CD}$$

対称性より、

$$\vec{MM'} = 2\vec{MB} = -\frac{1+\sqrt{7}}{3} \vec{CB} - \frac{7+\sqrt{7}}{3} \vec{CD}$$

$$\vec{MM''} = 2\vec{MD} = 2(\vec{CD} - \vec{CM}) = -\frac{7+\sqrt{7}}{3} \vec{CB} - \frac{1+\sqrt{7}}{3} \vec{CD}$$

$$\begin{aligned} |\vec{MM'}|^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2 |\vec{CB}|^2 + \frac{28+16\sqrt{7}}{9} \vec{CB} \cdot \vec{CD} + \left(\frac{7+\sqrt{7}}{3}\right)^2 |\vec{CD}|^2 \\ &= \frac{8+2\sqrt{7}}{9} - \frac{7\sqrt{7}+28}{9} + \frac{56+14\sqrt{7}}{9} = \frac{4+\sqrt{7}}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{MM'} \cdot \vec{MM''} &= \frac{14+8\sqrt{7}}{9} |\vec{CB}|^2 + \frac{64+16\sqrt{7}}{9} \vec{CB} \cdot \vec{CD} + \frac{14+8\sqrt{7}}{9} |\vec{CD}|^2 \\ &= \frac{14+8\sqrt{7}}{9} - \frac{16\sqrt{7}+28}{9} + \frac{14+8\sqrt{7}}{9} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle MM'M'' &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{MM'}|^2 |\vec{MM''}|^2 - (\vec{MM'} \cdot \vec{MM''})^2} \\ &= \frac{4+\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad a_n = f^{-1}(n) \quad 1 \leq n \leq \infty,$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$* \quad f(0) = 1, \quad f'(x) \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{x+1} \quad (x \geq -1)$$

$$y = f(x) \quad x \geq -1,$$

$$y = \sqrt{x+1} \quad (x \geq -1, y \geq 0)$$

$$y^2 = x+1 \quad (x \geq -1, y \geq 0)$$

$$x = y^2 - 1 \quad (x \geq -1, y \geq 0)$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると、} y = x^2 - 1 \quad (y \geq -1, x \geq 0)$$

$$(したがって、) \quad f^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

$$a_2 = f^{-1}(2) = \underline{3}, \quad a_3 = f^{-1}(3) = \underline{8}$$

$$(2) \quad n \geq 2 \text{ のとき、}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \{ f^{-1}(k+1) - f^{-1}(k) \}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6} n(n-1)(4n+1)}} \quad \triangle$$

* $n=1$ とするとき 0 になるため、 $n=1$ のときも成立。

$$(3) \quad f(x) = e^x \text{ とおくと, } f^{-1}(x) = \log x \quad (x > 0)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき,}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} k (a_{k+1} - a_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \{f^{-1}(k+1) - f^{-1}(k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \{\log(k+1) - \log k\}$$

$$= (\log 2 - \log 1) + 2(\log 3 - \log 2) + 3(\log 4 - \log 3) + \dots$$

$$\dots + (n-2)\{\log(n-1) - \log(n-2)\} + (n-1)\{\log n - \log(n-1)\}$$

$$= -\log 2 - \log 3 - \log 4 \dots - \log(n-1) + (n-1)\log n$$

$$= n\log n - \log(n!)$$

* $n=1$ とおくと 0 になるため, $n=1$ のときは成立.

$$(4) \quad n! \geq n^n e^{1-n}$$

$$\Leftrightarrow \log(n!) \geq \log(n^n e^{1-n})$$

$$\Leftrightarrow \log(n!) \geq n\log n + (1-n)$$

$$\Leftrightarrow n\log n - \log(n!) \leq n-1 \quad (*)$$

$f(x) = e^x$ により, $S_n \leq n-1$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k \{ \log(k+1) - \log k \} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \end{aligned}$$

$$f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x \geq 1) \quad \text{と} \text{お} \text{く}.$$

$$f(x) = x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \log(x+1) - x \log x \quad \text{よ} \text{し}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \log(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} - \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} < 0 \quad \text{よ} \text{し} \end{aligned}$$

$$f'(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

$$f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \log e = 1$$

$$\text{したがって、} S_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) < \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1$$

以上より題意は示された。

< 講評 >

Ⅰ (1) (a) 必ず正答したい。

(b) (a) と同じ要領で取り組みはよいのだが、差がつく。

(2) (a) (b) (c) は必ず正答したい。

(d) は類題経験の有無で差がつく。

(3) (a) (b) は必ず正答したい。

(c) は定番中の定番の問題であるが、

落ちついて一般化 ($\sum_{n=1}^N nr^n$ を計算する)

でもたかどうかで差がつく。

Ⅱ (a) 必ず正答したい。

(b) 前半は指示通り計算するだけである。必ず正答したい。

後半は対称性も利用できるかどうかで差がつく。

(c) 同様に、対称性を利用したい、差がつく。

Ⅲ (1) (2) 必ず正答したい。

(3) 答えが展開を予想できるかどうかで差がつく。

(4) 示すべき式を同値変形し、これまでの結果が利用できる

形にする。 $(1 + \frac{1}{x})^x < e$ であることは有名な事実である。やや難。

必ず正答したい問題もすべて取り、差がつく問題を半分以上正答したい。

全体的に難しい問題はほとんどないが、試験時間に対する
計算量が多い (例年のことである。)

悩んでいる時間は一切ない。確実に取れる問題に時間を使い、
点数も積み上げていくべきである。