

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

東京医科大学 数学 試験日2月7日(水)



$$\boxed{1} \quad (1) \quad x(5) = 4.\overset{\circ}{3}\overset{\circ}{2}(5) \quad \therefore 44x(5) = 423(5) \quad x = \frac{113}{24} \quad (\text{答})$$

$$100x(5) = 432.\overset{\circ}{3}\overset{\circ}{2}(5) \quad 24x(10) = 113(10)$$

$$(2) \quad \sum_{n=3}^{15} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{n=3}^{15} \frac{6}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{n=3}^{15} 3 \left(\frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{14 \cdot 15} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{70} = \frac{104}{70} = \frac{52}{35} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\beta = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\alpha\beta \text{ の 1 偏角 は } -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad \dots (\text{答})$$

$$(\alpha\beta)^{2024} = 20^{2024} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} \times 2024\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} \times 2024\right) \right)$$

$$\frac{\pi}{12} \times 2024 = \frac{506}{3} \pi = \left(168 + \frac{2}{3}\right) \pi \quad \text{より}$$

$$(\alpha\beta)^{2024} \text{ の 1 偏角 は } \frac{2}{3} \pi \quad \dots (\text{答})$$

$$(4) \quad f(x) = xe^x \text{ より } f'(x) = (x+1)e^x > 0 \quad (x > 0) \text{ なる}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

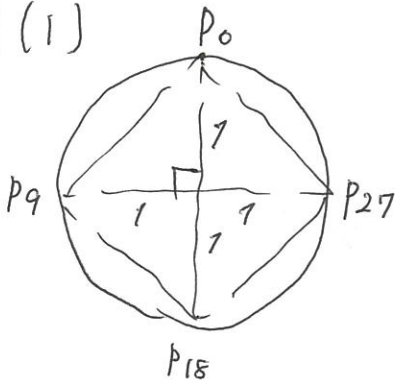
$$g(a) = b \Leftrightarrow a = f(b)$$

$$\frac{\sqrt{e}}{2} = be^b \text{ より } b = \frac{1}{2} \quad \therefore g(a) = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$g'(y) = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = (x+1)e^x$$

$$g'(a) = \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{(b+1)e^b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \dots (\text{答})$$

2 (1)



1つの頂点を $P_0 \sim P_8$ のどれかとするとき
残りは1通りに決まる。

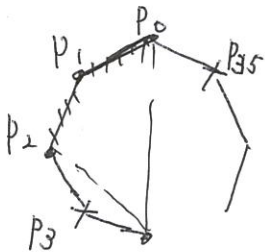
よって正方形は 9 個 (答)

その面積は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (答)

(2) 長方形は対角線が半径 1 の円の直径に等しい
ときだから、直径が 18 本とれることと合わせて

$$18C_2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153 \text{ 個 (答)}$$

(3) (ア) 共有する 2 辺が K の隣接する 2 辺のとき

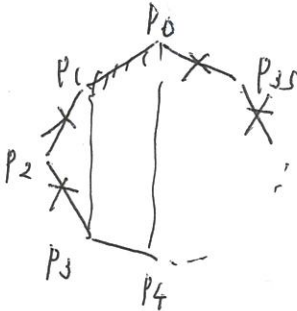


この 2 辺のとり方は 36 通りあり。

残りの頂点は左図のように 5 個の頂点
以外からとれるから

$$36 \cdot (36 - 5) = 36 \cdot 31 \text{ 個}$$

(イ) 共有する 2 辺が K の隣接する 2 辺でないとき



共有する 1 辺を固定したとき、もう 1 辺の

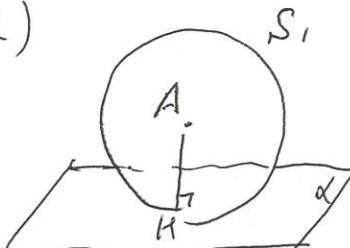
とり方は $36 - 5 = 31$ 通りあり。どちらを
固定するから 2 通り重複するから

$$\frac{36 \cdot 31}{2} \text{ 個}$$

$$(ア)(イ) \text{ より } 36 \cdot 31 + \frac{36 \cdot 31}{2} = \frac{3}{2} \cdot 36 \cdot 31 = 1674 \text{ 個 (答)}$$

[3] (1) $\alpha: 2x + 2y + z = 3$ より

$$\vec{n} = (2, 2, 1) \quad \dots \left(\frac{\times}{\circ}\right)$$

(2)  $V = AH = \frac{|2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 12 \quad \dots \left(\frac{\times}{\circ}\right)$

$$\vec{AH} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k: \text{実数}) \text{ とおけるから}$$

$$\vec{OH} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+2k \\ 8+2k \\ 7+k \end{pmatrix}$$

H は α 上 より $2(8+2k) + 2(8+2k) + (7+k) = 3$

$$9k + 39 = 3 \quad \therefore k = -4$$

$$H(0, 0, 3) \quad \dots \left(\frac{\times}{\circ}\right)$$

(3) $S_1: (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-7)^2 = 144$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 16y - 14z + 64 + 64 + 49 = 144 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_2: (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 144$$

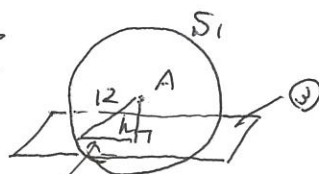
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 16 + 4 + 1 = 144 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より $8x + 12y + 12z - 156 = 0$

$$2x + 3y + 3z - 39 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

S_1 と S_2 の共通部分の円は $\textcircled{3}$ 上にある。A から $\textcircled{3}$ までの距離を h と考えよう

$$h = \frac{|2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7 - 39|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$$



より $r' = \sqrt{12^2 - h^2} = \sqrt{144 - 22} = \sqrt{122} \quad \dots \left(\frac{\times}{\circ}\right)$

S_1 と S_2 の半径は等しいから Q は AB の中点で

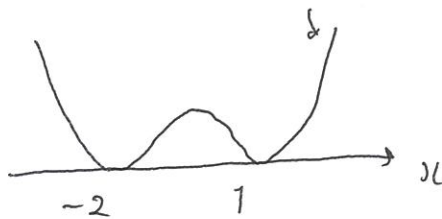
$$Q(6, 5, 4) \quad \dots \left(\frac{\times}{\circ}\right)$$

$$(4) \quad |\vec{OH}|^2 = 9, \quad |\vec{OQ}|^2 = 6^2 + 5^2 + 4^2 = 77$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{OQ} = 12 \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned} \Delta OHQ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OH}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OH} \cdot \vec{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 77 - 12^2} = \frac{3}{2} \sqrt{77 - 16} = \frac{3}{2} \sqrt{61} \quad \dots (\times) \end{aligned}$$

4 (1)



$$\begin{aligned} y = f(x) \quad f(x) &= (x+2)^2(x-1)^2 \\ &= (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 2x + 1) \\ &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a = 2, b = -3, c = -4, d = 4 \quad \dots (\times)$$

$$(2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

とを用いて

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^7 dx &= -\int_{-2}^1 (x+2)(1-x)^7 dx \\ &= -\frac{1!7!}{(1+7+1)!} \{1 - (-2)\}^{1+7+1} = -\frac{1}{9 \cdot 8} \cdot 3^9 = -\frac{3^7}{8} \\ &= -\frac{2187}{8} \quad \dots (\times) \end{aligned}$$

(3) 部分積分法を用いて

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x+2)^{p+1} (x-1)^8 dx &= \left[(x+2)^{p+1} \cdot \frac{1}{8+1} (x-1)^{8+1} \right]_{-2}^1 \\ &\quad - \int_{-2}^1 (p+1)(x+2)^p \cdot \frac{1}{8+1} (x-1)^{8+1} dx \\ &= \frac{-(p+1)}{8+1} \cdot \int_{-2}^1 (x+2)^p (x-1)^{8+1} dx \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} = \frac{\textcircled{5}}{\textcircled{6}} \quad \dots (\frac{5}{6})$$

(4) (2) で用いた公式と利用して、求める係数は

$$\begin{aligned} \pi \int_{-2}^1 (x+2)^4 (x-1)^4 dx &= \pi \cdot \frac{4!4!}{(4+4+1)!} \{1 - (-2)\}^{4+4+1} \\ &= \pi \cdot \frac{4!4!}{9!} \cdot 3^9 = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \cdot 3^9 = \pi \cdot \frac{3^7}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \frac{2187}{70} \pi \quad \dots (\frac{2187}{70}) \end{aligned}$$

(注) (3) の結果を用いて (2) に帰着させてよい。

<講評>

① (1) 5進法の分数 (2) 分数式で表される数列の和 (部分分数分解)

(3) ド・モアブルの定理 (4) 逆関数の導関数

② 正多角形の頂点と用いた四角形の個数。

正方形・長方形は直径とうまく使う。

2辺夾角する四角形はその2辺が隣接するかしないかで分けるとよい。

③ 球面と平面の交わり

(1)(2) では法線ベクトルと利用する問題

(3) は図形的に三平方の定理を用いねばよい。

④ (1) $f(x)=0$ は $x=-2, 1$ と重解にむつ。

(2) 上に用いた公式と使えばよい。

(3) 部分積分法 (4) (3) の結果を用いてよい。公式を用いてもよい。

①, ②(1), ③(1), ④(1) とすばやく解き、残りに時間をかけるとよい。
全体的に標準的な問題である。