

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

東京慈恵会医科大学 数学 試験日 2月18日(日)



1. 取り出した3個の玉が、赤玉2個、白玉1個である事象をAとする。

異なる6個の玉から順に3個を取り出す場合の数は  ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$  通りであり、  
3個の赤玉から2個を選ぶのは  ${}_3C_2$  通り、3個の白玉から1個を選ぶのは  ${}_3C_1$  通り、  
選んだ3個の並べ方は  $3!$  通りであるから、事象Aが起こる確率は

$$P(A) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$$

$a_1 < a_2 < a_3$  である事象をBとする。

このとき、 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$  と定まるので、 $A \cap B$  は以下の場合となる。

$\left. \begin{array}{l} \text{赤1} \rightarrow \text{赤2} \rightarrow \text{白3} \\ \text{赤1} \rightarrow \text{白2} \rightarrow \text{赤3} \\ \text{白1} \rightarrow \text{赤2} \rightarrow \text{赤3} \end{array} \right\} 3 \text{通り}$

よって、 $A \cap B$  が起こる確率は

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{40}$$

したがって、求める条件付き確率(A)は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{18} \quad (\text{答})$$

$a_1 < a_2$  か  $a_2 > a_3$  である事象をCとする。

このとき、 $A \cap C$  について、取り得る  $(a_1, a_2, a_3)$  の組とそのときの赤、白の順番について

| $(a_1, a_2, a_3)$ | 赤2個、白1個の出る順番        |
|-------------------|---------------------|
| $(1, 2, 1)$       | 赤→赤→白, 白→赤→赤        |
| $(1, 3, 1)$       |                     |
| $(2, 3, 2)$       |                     |
| $(1, 3, 2)$       | 赤→赤→白, 赤→白→赤, 白→赤→赤 |
| $(2, 3, 1)$       |                     |

よって、 $A \cap C$  が起こる場合の数は  $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$  通りであるから、

$A \cap C$  が起こる確率は

$$P(A \cap C) = \frac{12}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

したがって、求める条件付き確率(イ)は

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{9} \quad \left(\frac{2}{9}\right)$$

2. (1)  $1 < a < 2$ ,  $1 \leq x \leq 2$  のとき、方程式  $\log(1+x) - \log ax = 0$  の

真数条件  $\begin{cases} 1+x > 0 \\ ax > 0 \end{cases}$  は成立している。このとき、 $\log(1+x) = \log ax$  より

$1+x = ax$  すなわち  $x = \frac{1}{a-1}$  である ( $1 < a < 2$  より  $a-1 \neq 0$  を満たす)。

ここで、 $1 < a < 2$  より  $a-1 > 0$  に注意して、不等式  $1 \leq \frac{1}{a-1} \leq 2$  を解くと

$\frac{3}{2} \leq a \leq 2$  であるので、求める解の個数は

$$\begin{cases} 1 < a < \frac{3}{2} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ \frac{3}{2} \leq a < 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3}\right)$$

(2) (i)  $1 < a < \frac{3}{2}$  のとき、 $1 \leq x \leq 2$  において  $ax \leq 1+x$  であるから、

$$S(a) = \int_1^2 \{\log(1+x) - \log ax\} dx = \int_1^2 \{\log(1+x) - \log x - \log a\} dx$$

$$= \left[ (1+x)\log(1+x) - (1+x) - x\log x + x - x\log a \right]_1^2$$

$$= (3\log 3 - 3 - 2\log 2 + 2 - 2\log a) - (2\log 2 - 2 - \log 1 + 1 - \log a)$$

$$= -\log a + 3\log 3 - 4\log 2$$

(ii)  $\frac{3}{2} \leq a < 2$  のとき、 $1 \leq x \leq \frac{1}{a-1}$  において  $ax \leq 1+x$  であり、

$\frac{1}{a-1} \leq x \leq 2$  において  $1+x \leq ax$  であるから、

$$S(a) = \int_1^{\frac{1}{a-1}} \{\log(1+x) - \log ax\} dx - \int_{\frac{1}{a-1}}^2 \{\log(1+x) - \log ax\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ (1+x) \log(1+x) - (1+x) - x \log x + x - x \log a \right]_{\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} \\
 &\quad - \left[ (1+x) \log(1+x) - (1+x) - x \log x + x - x \log a \right]_{\frac{1}{a-1}}^2 \\
 &= \left( \frac{a}{a-1} \log \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \log \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \log a \right) \\
 &\quad - (2 \log 2 - 2 - \log 1 + 1 - \log a) \\
 &\quad - (3 \log 3 - 3 - 2 \log 2 + 2 - 2 \log a) \\
 &\quad + \left( \frac{a}{a-1} \log \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \log \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \log a \right) \\
 &= 2 \left( \frac{a}{a-1} \log a - \frac{a}{a-1} \log(a-1) - \frac{a}{a-1} + \frac{1}{a-1} \log(a-1) + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \log a \right) \\
 &\quad + 3 \log a - 3 \log 3 + 2 \\
 &= 2 \left( \frac{a-1}{a-1} \log a - \frac{a-1}{a-1} \log(a-1) - \frac{a-1}{a-1} \right) + 3 \log a - 3 \log 3 + 2 \\
 &= 5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3
 \end{aligned}$$

以上より,

$$S(a) = \begin{cases} -\log a + 3 \log 3 - 4 \log 2 & (1 < a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \\ 5 \log a - 2 \log(a-1) - 3 \log 3 & (\frac{3}{2} \leq a < 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \left( \frac{5}{3} \right)$$

(3)  $1 < a < \frac{3}{2}$  において  $S'(a) = -\frac{1}{a} < 0$

$\frac{3}{2} < a < 2$  において  $S'(a) = \frac{5}{a} - \frac{2}{a-1} = \frac{3a-5}{a(a-1)}$

よって,  $S(a)$  の増減表は,

| $a$     | (1) | --- | $\frac{3}{2}$ | --- | $\frac{5}{3}$ | --- | (2) |
|---------|-----|-----|---------------|-----|---------------|-----|-----|
| $S'(a)$ |     | -   |               | -   | 0             | +   |     |
| $S(a)$  |     | ↘   |               | ↘   |               | ↗   |     |

よって,  $S(a)$  は  $a = \frac{5}{3}$  で最大値をとる.

$$S\left(\frac{5}{3}\right) = 5 \log \frac{5}{3} - 2 \log \frac{2}{3} - 3 \log 3 = 5 \log 5 - 6 \log 3 - 2 \log 2 \text{ となる.}$$

したがって, 最大値  $5 \log 5 - 6 \log 3 - 2 \log 2$   $\left( \frac{5}{3} \right)$

そのときの  $a$  の値は  $a = \frac{5}{3}$   $\left( \frac{5}{3} \right)$

3. (1)  $f(h-1)=l$ ,  $f(h)=m$ ,  $f(h+1)=n$  ( $l, m, n$  は整数) とおく.

$$\begin{cases} a(h-1)^2 + b(h-1) + c = l & \text{--- ①} \\ ah^2 + bh + c = m & \text{--- ②} \\ a(h+1)^2 + b(h+1) + c = n & \text{--- ③} \end{cases}$$

② - ① より  $a(2h-1) + b = m - l$  --- ④

③ - ② より  $a(2h+1) + b = n - m$  --- ⑤

⑤ - ④ より  $2a = l - 2m + n$  --- ⑥

⑤ + ④ より  $4ah + 2b = n - l$  とおく. ⑥ を代入して

$$2h(l - 2m + n) + 2b = n - l$$

よって,  $2b = n - l - 2h(l - 2m + n)$  --- ⑦

② の両辺を 2 倍して,  $2ah^2 + 2bh + 2c = 2m$  に ⑥, ⑦ を代入して

$$h^2(l - 2m + n) + h\{n - l - 2h(l - 2m + n)\} + 2c = 2m$$

よって  $2c = h^2(l - 2m + n) - h(h - l) + 2m$  --- ⑧

⑥, ⑦, ⑧ より,  $2a, 2b, 2c$  は整数であることが示された.

$f(x)$  が  $px - q$  で割り切れるので, 因数定理より  $f\left(\frac{q}{p}\right) = 0$  であるから

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b \cdot \frac{q}{p} + c = 0 \quad \text{すなわち} \quad aq^2 + bpq + cp^2 = 0 \quad \text{--- ⑨}$$

⑨ より  $2aq^2 = -p(2bq + 2cp)$  とおく.  $2a, 2b, 2c, p, q$  は整数より,

右辺は  $p$  で割り切れるから左辺の  $2aq^2$  も  $p$  で割り切れるなければならない.

よって,  $p$  と  $q$  は互いに素であることより,  $2a$  は  $p$  で割り切れる.

よって,  $\frac{2a}{p}$  は整数である.

同様に, ⑨ より  $2cp^2 = -q(2aq + 2bp)$  とおくから,

$2cp^2$  は  $q$  で割り切れる.  $p$  と  $q$  が互いに素より  $2c$  は  $q$  で割り切れる.

よって,  $\frac{2c}{q}$  は整数である.

(証明終)

(2) 正しくない. 反例として  $f(x) = (3x-2)\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  かとめる.

$p=3, q=2$  とすると  $3x-2$  で割り切れ,  $p$  と  $q$  は互いに素であり,  $f(0)=-1, f(1)=2, f(2)=14$  であるから  $h=1$  をとれるが,  $\frac{a}{p} = \frac{3}{2}, \frac{c}{q} = -\frac{1}{2}$  は整数でない.

4. (1) 3点  $A(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $B(-1, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $C(0, 0, 2)$  を通る平面を  $\mathcal{U}$  とすると、平面  $\mathcal{U}$  の方程式は、 $\mathcal{U}: \sqrt{3}y + z - 2 = 0$  である。

よって、この平面  $\mathcal{U}$  の法線ベクトルの 1 つとし  $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$  をとれる。

ここで、 $\vec{OH} \parallel \vec{n}$  であるから、 $\vec{OH} = t\vec{n}$  ( $t$ : 実数) とおくと、 $H(0, \sqrt{3}t, t)$  と表されて、これが平面  $\mathcal{U}$  上にあることから、 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}t + t - 2 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2}$  したがって、 $H(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  である。

これより、円板  $\mathcal{D}$  上の点  $(x, y, z)$  が満たす条件は、

$$\mathcal{D}: \begin{cases} \sqrt{3}y + z - 2 = 0 & \text{--- ①} \\ x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

これと平面  $\mathcal{E} = \mathcal{U}$  の共有点が満たす条件は

$$\text{①より } \sqrt{3}y + t - 2 = 0 \text{ であるから } y = \frac{2-t}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって、②より } x^2 + \left(\frac{2-t}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{4-2t-3}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

ここで、これを満たす点が存在する条件は、 $x^2 \geq 0$  より

$$1 - \frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

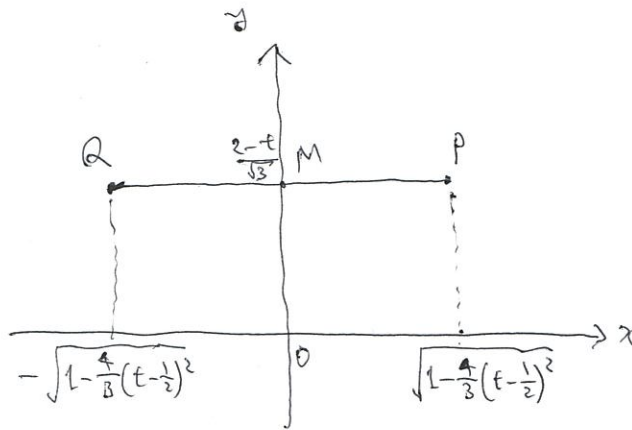
(2) (i) の途中式より、円板  $\mathcal{D}$  の平面  $\mathcal{E} = \mathcal{U}$  による切り口は、線分

$$\begin{cases} -\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \leq x \leq \sqrt{1 - \frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \\ y = \frac{2-t}{\sqrt{3}} \\ z = t \end{cases} \quad \text{--- ③}$$

である。

この線分を  $xy$  平面上のまわりに回転したときの通過領域の面積を  $S(t)$  とする。  
立体  $K$  の平面  $z=t$  による断面面積が  $S(t)$  となる。

線分 (3) を  $xy$  平面上に正射影して原点のまわりに回転したときの  
通過領域の面積が  $S(t)$  となる。  $xy$  平面上において、



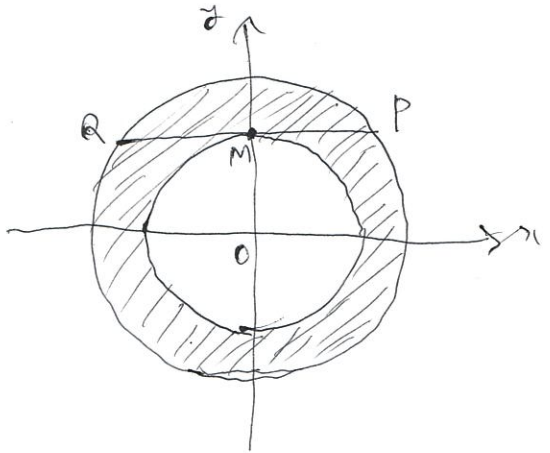
$$P\left(\sqrt{1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}, \frac{2-t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Q\left(-\sqrt{1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}, \frac{2-t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$R\left(0, \frac{2-t}{\sqrt{3}}\right)$$

と表すと、

通過領域は左図の 2 つの  
同心円の間の領域となるので、



$$S(t) = \pi \cdot OP^2 - \pi \cdot OM^2$$

$$= \pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-t}{\sqrt{3}}\right)^2 \right\}$$

$$- \pi \left(\frac{2-t}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \pi \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$

ここで、 $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  とおくと、

$$S(t) = -\frac{4\pi}{3}(t-\alpha)(t-\beta)$$

となるので、求める体積  $V$  は、

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} S(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{4\pi}{3}(t-\alpha)(t-\beta) \right\} dt$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{2\pi}{9} \cdot (\sqrt{3})^3 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \quad \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$