

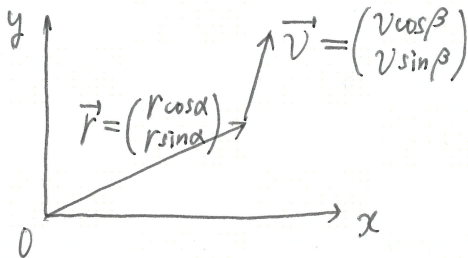
医学部専門予備校 クエスト 解答速報

東京慈恵会医科大学 物理

試験日 2月18日(日)



1.

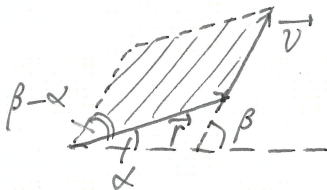


向1.

$$xv_y - yv_x = r \cos \alpha v \sin \beta - r \sin \alpha v \cos \beta$$

$$= rv \sin(\beta - \alpha) (\equiv J')$$

これは $\vec{r}$ と $\vec{v}$ を 2 辺とする 平行四辺形の面積である。



この面積を m 倍したものが J に等しい。

$$J = m(xv_y - yv_x) (= mJ')$$

ここで、ケプラー第2法則に現れる面積速度を
図示すると以下。



これは J' の半分である。

いま、面積速度を $\frac{dS}{dt}$ とすると、

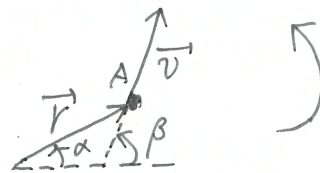
$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{J'}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{J}{m} \end{aligned}$$

ゆえに、
「 $\frac{dS}{dt} = \text{一定}$ 」とき、 $J = \text{一定}$ 」
となる。

$$J > 0 \text{ とき, } \sin(\beta - \alpha) > 0$$

$$\therefore 0 < \beta - \alpha < \pi$$

$$\therefore \alpha < \beta$$

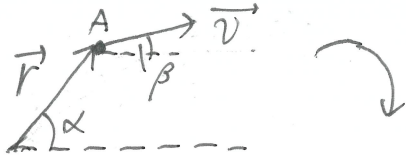


これは、小球 A が xy 平面において
反時計回りに動いていることを示している。

• $J < 0$ とき、 $\sin(\beta - \alpha) < 0$

$\therefore -\pi < \beta - \alpha < 0$

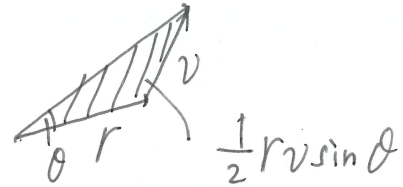
$\therefore \beta < \alpha$



つまり、 $\frac{dS}{dt}$ は $\frac{1}{2} r v \sin \theta$ (θ は $\vec{r}$ と

$\vec{v}$ のなす角度) とも表される。本問では、

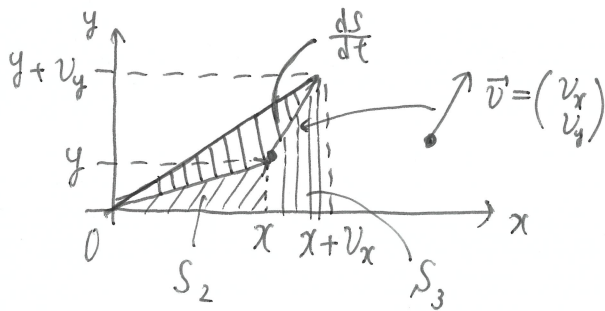
$\theta = \beta - \alpha$ である。



これは、小球 A が xy 平面において時計回りに回っていることを示している。

解答のあとで

$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} (xv_y - yv_x)$ と導いてみる。



全面積 $S_1 = \frac{1}{2} (x + v_x)(y + v_y)$

$S_2 = \frac{1}{2} xy$

$S_3 = \frac{1}{2} (y + y + v_y)(x + v_x - x)$

$\therefore \frac{dS}{dt} = S_1 - S_2 - S_3$

$= \frac{1}{2} (x\cancel{y} + xv_y + yv_x + \cancel{v_x v_y} - \cancel{x y} - 2yv_x - \cancel{v_x v_y})$

$= \frac{1}{2} (xv_y - yv_x)$

問2

(かんばって $\frac{dJ}{dt}$ を計算しよう)

$\frac{dJ}{m} = \left\{ (x + v_x 4t)(v_y + \frac{F_y}{m} 4t) - (y + v_y 4t)(v_x + \frac{F_x}{m} 4t) \right\} - (xv_y - yv_x)$

$\approx x \frac{F_y}{m} 4t + v_x v_y 4t - \left(y \frac{F_x}{m} 4t + v_x v_y 4t \right)$
($\because (4t)^2 \approx 0$ 付近)

$\therefore dJ = x F_y 4t - y F_x 4t$

$\therefore \frac{dJ}{4t} = x F_y - y F_x$

⑦

$$\frac{dJ}{dt} = m \left\{ \underbrace{\frac{dx}{dt} v_y}_{v_x} + x \frac{dv_y}{dt} - \left(\underbrace{\frac{dy}{dt} v_x}_{v_y} + y \frac{dv_x}{dt} \right) \right\}$$

$$= x m \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y} - y m \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}$$

$$= x F_y - y F_x$$

(こちらの方が簡単)

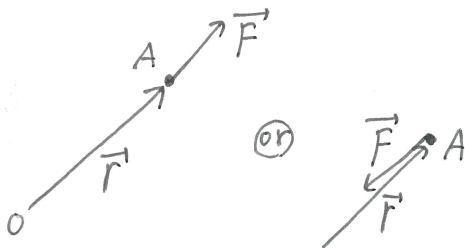
J が保存されるということは、 $\frac{dJ}{dt} = 0$ 、

つまり、 $x F_y - y F_x = 0$ ということ。

$$\therefore x F_y - y F_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_y}{F_x} = \frac{y}{x}$$

これは $\vec{F} \parallel \vec{r}$ と示している。



つまり、力 $\vec{F}$ のモーメント $= \vec{0}$ であり、J は保存される。

解答のあとに

$$x F_y - y F_x \equiv N \text{ とおくと、}$$

$$\frac{dJ}{dt} = N$$

となる。これは、「角運動量を時間変化させるのは力のモーメントである」とも示している。

外積の形式で表すなら、

$$J \rightarrow \vec{J} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$N \rightarrow \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

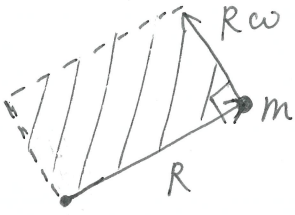
といて、

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

となる。

問3.



$$J = m R \cdot R \omega$$

$$= m R^2 \omega$$

問4.

$$K = \frac{1}{2} m (R \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{J}{m R^2} \right)^2 (\because \text{問3})$$

$$= \frac{J^2}{2 m R^2}$$

$$\textcircled{\text{or}} \frac{dK}{dJ} = \frac{1}{2 m R^2} \cdot 2 J$$

$$\Leftrightarrow dK = \frac{J}{m R^2} dJ$$

$$\therefore \Delta K = \omega \Delta J$$

☞ 「小球A + 光子」からなる系の全エネルギーは保存されるから、式が成立.

$$\Delta K = h \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \Delta J \omega = h \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\therefore \Delta J = \frac{h}{2\pi} (= \hbar)$$

(「プランクの h 」とわかる)

問5.

$$\textcircled{\square} h\nu = h \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\textcircled{\square} \Delta K = \frac{J^2}{2 m R^2} - \frac{(J - \Delta J)^2}{2 m R^2}$$

$$\approx \frac{2J \Delta J}{2 m R^2} (\because (\Delta J)^2 \approx 0)$$

$$= \Delta J \cdot \frac{J}{m R^2}$$

$$= \Delta J \cdot \omega (\because \text{問3})$$

解答のあとに

④ ボーアの量子数条件:

$$m v r = n \frac{h}{2\pi}$$

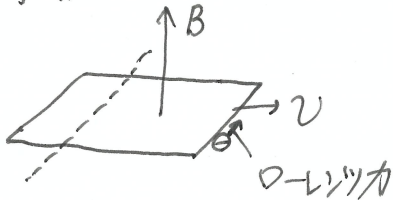
これは J に他ならない

$$\therefore \Delta J = \frac{h}{2\pi} (\because \Delta n = 1)$$

☞ も解いたあとに ④に思いいれたと
いふ素晴らしい.

2.

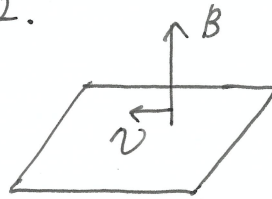
I. 問 1.



- コイル内にある自由電子(以下、 $\ominus$ と略記)が永久的磁石が作る磁場(以下 B と略記)からローレンツ力を受け、コイル内と移動する。
- この $\ominus$ の動きが電流であり、コイルと平行な方向にローレンツ力を受けている部分に起電力が生じたと見なせる。
- この場合、起電力の大きさ $\mathcal{E}$ は、 $\mathcal{E} = vBl$ (v は $\ominus$ の速さ、 l はコイルの v と垂直な部分の長さ)と表せ、等線の材質を表す物理量は入っていない。つまり、 $\mathcal{E}$ と材質は無関係である。

$$\left(\cdot \mathcal{E} = B \frac{dS}{dt} = vBl \right)$$

問 2.

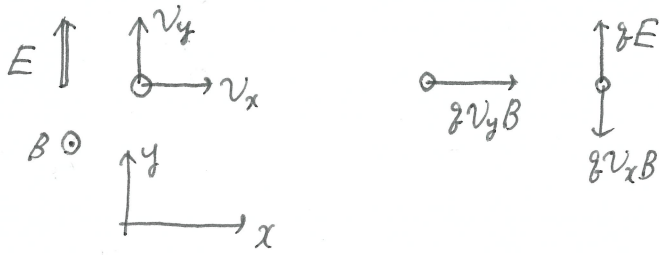


- 磁石が動くことでコイルと貫く磁束が時間変化する。
- これにより、コイル内部には誘導電場 E が生じる(ファラデーの電磁誘導の法則)。
 $\ominus$ は E から力を受けコイル内と移動する。
これが電流である。
- E と $\mathcal{E}$ の向きは同じであり、 E と $\mathcal{E}$ の関係は以下。
$$S \left| \frac{dB}{dt} \right| = \mathcal{E} \Delta x = \mathcal{E}$$

(Δx はコイルの長さ)
上式において、等線の材質を表す物理量は入っていない。つまり、 $\mathcal{E}$ と材質は無関係である。

$$\left(\cdot \mathcal{E} = S \frac{dB}{dt} = E \Delta x \right)$$

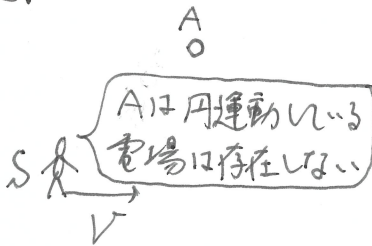
II.



問1.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qv_y B \\ -qv_x B + qE \end{pmatrix}$$

問2.



$$S \text{ から見た } A \text{ の速度} = \begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore S \text{ から見た } A \text{ が受ける力の } y \text{ 成分} \\ &= -q(v_x - V)B + qE \\ &= -qv_x B + q(E - VB) \end{aligned}$$

S には電場が 0 に見えることから、

$$E - VB = 0$$

$$\therefore V = \frac{E}{B}$$

or

ローレンツ力 $qv_y B$ のみを受けると A は円運動する。このとき、運動方程式 (以下、EOM. と略す) は、

$$\begin{cases} ma'_x = qv_y B \\ ma'_y = -qv_x B \end{cases} \dots \textcircled{A}$$

いま、A は qE も受けていることから、その EOM は

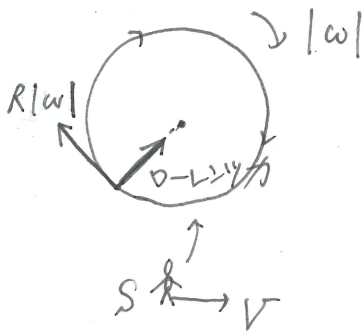
$$\begin{cases} ma_x = qv_y B \\ ma_y = -qv_x B + qE \end{cases} \dots \textcircled{B}$$

①と②の力の表記が同型になるように②を変形すると、

$$-q\left(v_x - \frac{E}{B}\right)B$$

これは、「A の速度が $v_x - \frac{E}{B}$ に見える座標系では A は円運動しているように見える」ことを示している。つまり、S は $+x$ 向きに $\frac{E}{B}$ で動いている。

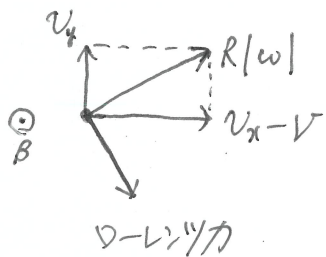
問3.



Sから見たAのEOMは、

$$m R |\omega|^2 = q R |\omega| B$$

$$\therefore |\omega| = \frac{qB}{m}$$



いま、Aの速度とローレンツ力の関係は上図のようになるので、Aは時計回りに円運動していると言える。つまり、 $\omega < 0$ 。

$$\therefore \omega = -\frac{qB}{m}$$

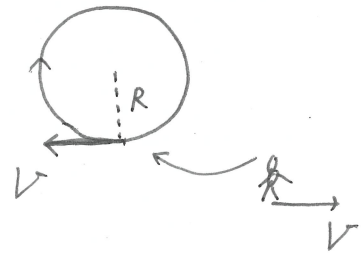
問4.

- Sから見ると等速円運動であり定式化が簡単
- Sから見るとAの速度をまず求めてみる
- それを時間で積分すれば座標が出てくる
- $\omega < 0$ に注意 $\Rightarrow |\omega|$ で考えよう

Sから見たAの速度成分を $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$ とおく。

$$t=0 \text{ で, } x=y=0, \text{ から, } v_x=v_y=0$$

ゆえ、Aは $t=0$ で $V_x=0-V$, $V_y=0$ である。



$$\begin{cases} V_x = -V \cos |\omega| t \\ V_y = V \sin |\omega| t \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} v_x = V_x + V \\ \quad = V(1 - \cos |\omega| t) \\ \quad = V(1 - \cos \omega t) \\ v_y = V_y \\ \quad = V \sin |\omega| t \\ \quad = -V \sin \omega t \end{cases}$$

v_x, v_y を各々時間で積分し、

$$\begin{cases} x = V(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t) + x_0 \\ y = \frac{V}{\omega} \cos \omega t + y_0 \end{cases}$$

$t=0$ で $x=y=0$ であることから、

$$\begin{cases} 0 = V(0 - \frac{1}{\omega} \sin 0) + x_0 \\ 0 = \frac{V}{\omega} \cos 0 + y_0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{V}{\omega} \end{cases}$$

よって、

$$\begin{cases} x = V(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t) \\ y = \frac{V}{\omega} (-1 + \cos \omega t) \end{cases}$$

解答のあとで

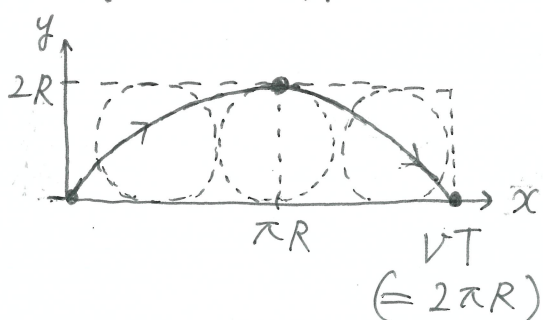
• $V = R|\omega|$ より、

$$\frac{V}{\omega} = -R (\because \omega < 0)$$

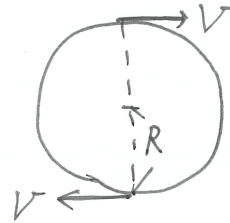
よって、

$$\begin{cases} x = V(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t) \\ y = R(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

これは t を媒介変数とするサイクロイド曲線と示している。

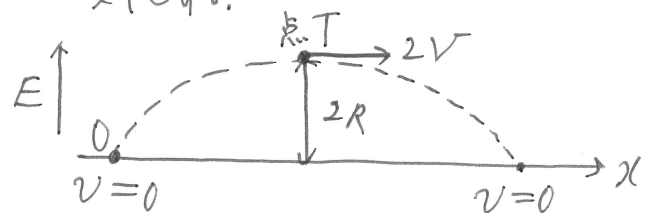


• Sから見たAの軌道は以下。



速さは不変であり、つねに V 。

• 静止系から見た場合、Aの速さは刻々と変化する。



ここで、エネルギー保存則から点Tで $2V$ になることを求めてみよう。

点Tの速さを v とすると、点OとTでのエネルギー保存則を考えて、

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m V^2 + q E \cdot 2R$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{q E R}{m} + V^2}$$

ここで、EOMより、

$$m \frac{v^2}{R} = q v B$$

$$\therefore R = \frac{m v}{q B}$$

また、 $E = B V$ ($\because$ 向2) より、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{q B V}{m} \frac{m v}{q B}} \\ &= 2V \end{aligned}$$

III.

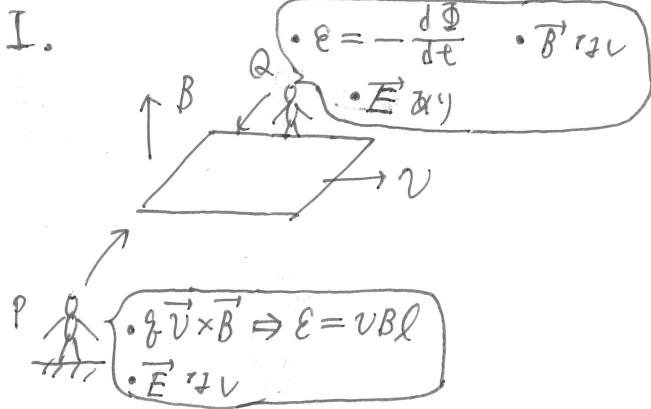
I. 内1 Bあり、Eなし

内2 Bなし、Eあり

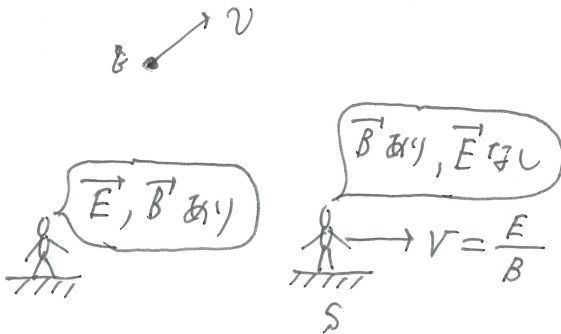
II. 止まった観測者には E, Bあり

$V = \frac{E}{B}$ で動く、Bのみあり

⇒ 観測者の運動によって (① 観測者
において) 現れる電場や磁場は異なる。



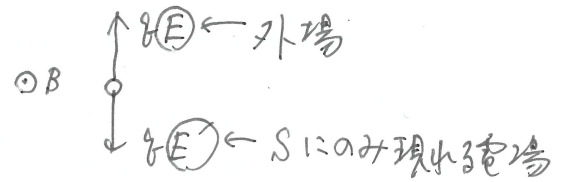
II.



I. において P と Q に現れる場は異なっている。にもかかわらず、 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ と統一的に起電力を表せるのが面白いところ。

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \begin{cases} vBl & (P) \\ E\Delta x & (Q) \end{cases}$$

II. において、S には $-y$ 向きに電場 E' が現れている。これが E と打ち消し合っ、S には電場が現れない。



$$E' = vB \text{ である。}$$

$$(\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B})$$

IV.

答えるだけならばすぐにできそうだが、リード文と
考慮し考えるとなると難しい。

リード文の1~3文目とどう使いはよいのか
(これも使えるか?)、ガウスの法則を使って
どう考えるか?

• したがって、答えるだけならば...

N極・S極は単独では存在せず、常にN・S
(一組)で存在する。ゆえに、物体がもつ
総磁気量は0である。

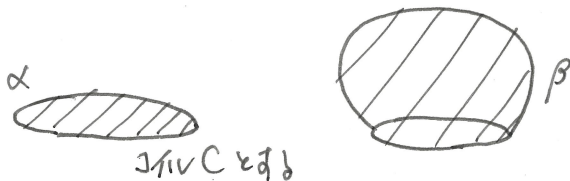


つねにN・S



磁気単極子なし
(モノポール)

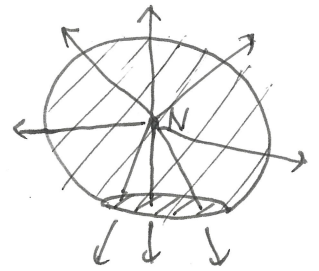
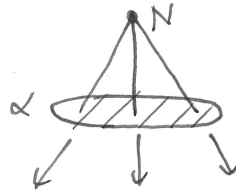
• リード文を用いて考えるならば...



このCとする

Cと辺縁とする2つの閉曲面 α と β

「N極のみがある」と仮定する(仮定⊗)



α, β を貫く磁束は異なる
(それぞれ Φ_α, Φ_β とする)

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_\alpha}{dt} \neq \frac{d\Phi_\beta}{dt}$$

$\Rightarrow$ ところがCに発生する起電力は一意的で、

$$\frac{d\Phi_\alpha}{dt} = \frac{d\Phi_\beta}{dt}$$

のはず。矛盾が生じている。

$\Rightarrow$ 仮定⊗が間違っている(背理法)

$\therefore$ N極, S極は単独では存在しない。

つまり、物体がもつ総磁気量は0。

昨年にも引き続き「物理」(の物理学)からの出
題であった。原理的なところを勉強しきく受験
生にはオプシスのような問題ばかりにしろ。他大学
といは一線を画す素晴らしい内容だといえる。
かみしやうな問題演習ではこのような内容には
立ちうちできないだろう(さて、どうしよう?)。8割以上でき
た人が20%, 3割未満の人数の人が30%, 4~6割で
きた人が50%くらいだったと推測する。改めて
私大医学部における福音のような内容であった。