

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本医科大学（後期）試験 数学 試験日 2 月 28 日（水）



[I] 問 1. $N_A = 4$ となる場合は、

$$\begin{cases} a=4 \\ b=1, 2, 4, 5 \\ (\text{操作 3 起こさない}) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=6 \\ (\text{操作 3 起こる}) \end{cases}$$

となる場合で、これらは互いに排反であるから、

$$P(N_A = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \quad (\text{答})$$

問 2. $N_B = 4$ となる場合は、 $\min\{b, 6-a\} = m$ とおくと、

$$\begin{cases} a=1 \quad (6-a=5) \\ b=4 \quad (m=4) \\ (\text{操作 3 起こさない}) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a=2 \quad (6-a=4) \\ b=3 \quad (m=3) \\ (\text{操作 3 起こる}) \end{cases}$$

$$\text{または} \quad \begin{cases} a=2 \quad (6-a=4) \\ b=4, 5 \quad (m=4) \\ (\text{操作 3 起こさない}) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a=3 \quad (6-a=3) \\ b=4, 6 \quad (m=3) \\ (\text{操作 3 起こる}) \end{cases}$$

となる場合で、これらは互いに排反であるから、

$$P(N_B = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

問3. $N_A \geq 4$ かつ $N_{A,R} = 2$ となる場合は、

$$\left\{ \begin{array}{l} a=4 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 2 \end{pmatrix} \\ b=1, 2, 4, 5 \\ (\text{操作3 起こさない}) \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=1, 2, 3, 4, 5 \\ (\text{操作3 起こさない}) \end{array} \right.$$

$$\text{または} \left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=6 \\ \text{操作3で白を選ぶ。} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=6 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 4 \end{pmatrix} \\ b=1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \text{操作3で白を選ぶ。} \end{array} \right.$$

となる場合で、これらは互いに排反であるから、

$$P(N_A \geq 4 \text{ かつ } N_{A,R} = 2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_6C_4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{6} = \frac{7}{27} \left(\frac{49}{6} \right) \end{aligned}$$

問4. $N_A = 4$ かつ $N_{A,R} = 1$ となる場合は、

$$\left\{ \begin{array}{l} a=4 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=1, 2, 4, 5 \\ (\text{操作3 起こさない}) \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \\ \text{白} 4 \end{pmatrix} \\ b=6 \\ \text{操作3で白を選ぶ。} \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=6 \\ \text{操作3で赤を選ぶ。} \end{array} \right.$$

となる場合で、これらは互いに排反であるから、

$$P(N_A = 4 \text{ かつ } N_{A,R} = 1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_4}{{}_6C_5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_5} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2 \cdot 4}{15} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$N_A = 4$ か $N_{A,R} = 1$ か $N_{B,R} = 1$ となる場合は、

$$\left\{ \begin{array}{l} a=4 \rightarrow A: \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=1, \quad 6-a=2 \text{ より } m=1 \rightarrow B: \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \text{ 個} \\ \text{白} 1 \text{ 個} \end{pmatrix} \text{ から赤 1 個を選ぶ.} \\ \text{(操作 3 は 起こらない)} \end{array} \right.$$

または

$$\left\{ \begin{array}{l} a=4 \rightarrow A: \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=2, 4, 5 \quad 6-a=2 \text{ より } m=2 \rightarrow B: \text{には残っている} \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \text{ 個} \\ \text{白} 2 \text{ 個} \end{pmatrix} \text{ をそのまま入れる.} \\ \text{(操作 3 は 起こらない)} \end{array} \right.$$

または

$$\left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A: \begin{pmatrix} \text{赤} 1 \\ \text{白} 4 \end{pmatrix} \\ b=6 \quad 6-a=1 \text{ より } m=1 \rightarrow B: \text{には残っている赤 1 個をそのまま入れる.} \\ \text{操作 3 で 白 を選ぶ} \end{array} \right.$$

または

$$\left\{ \begin{array}{l} a=5 \rightarrow A: \begin{pmatrix} \text{赤} 2 \\ \text{白} 3 \end{pmatrix} \\ b=6 \quad 6-a=1 \text{ より } m=1 \rightarrow B: \text{には残っている白 1 個をそのまま入れる.} \\ \text{操作 3 で 赤 を選ぶ} \end{array} \right.$$

となる場合で、これらは互いに排反であるから、

$$\begin{aligned} P(N_A = 4 \text{ か } N_{A,R} = 1 \text{ か } N_{B,R} = 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_4}{{}_6C_5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_5} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 4}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2 \cdot 4}{15} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{45} \end{aligned}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$\begin{aligned} P_{N_A=4 \text{ か } N_{A,R}=1}(N_{B,R}=1) &= \frac{P(N_A=4 \text{ か } N_{A,R}=1 \text{ か } N_{B,R}=1)}{P(N_A=4 \text{ か } N_{A,R}=1)} \\ &= \frac{\frac{3}{45}}{\frac{2}{27}} = \frac{9}{10} \quad \left(\frac{96}{100} \right) \end{aligned}$$

[II] 問 1, $w = \frac{z+i}{z+1}$ より $wz+w = z+i$ すなわち $(w-1)z = -w+i$

∴ $w=1$ とすると $0 = -1+i$ となり不適であるから $w \neq 1$ — ①

① のもとで $z = \frac{-w+i}{w-1}$ — ②

② を C_1 の方程式 $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ に代入して.

$$\left| \frac{-w+i}{w-1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{① のもとで同値変形して } \sqrt{2}|w-i| = |w-1|$$

$$\text{よって, } 2|w-i|^2 = |w-1|^2 \iff 2(w-i)\overline{(w-i)} = (w-1)\overline{(w-1)}$$

$$\iff 2(w-i)(\bar{w}+i) = (w-1)(\bar{w}-1)$$

$$\iff 2w\bar{w} + 2i w - 2i \bar{w} + 2 = w\bar{w} - w - \bar{w} + 1$$

$$\iff w\bar{w} + (1+2i)w + (1-2i)\bar{w} + 1 = 0$$

$$\iff (w+1-2i)(\bar{w}+1+2i) - (1-2i)(1+2i) + 1 = 0$$

$$\iff (w+1-2i)\overline{(w+1-2i)} - (1+4) + 1 = 0$$

$$\iff |w+1-2i|^2 = 4 \iff |w-(-1+2i)| = 2 \quad \left(\text{これは①を満たす.} \right)$$

よって、点 $Q(w)$ の軌跡は、中心 $-1+2i$, 半径 2 の円 である。
(答)

(別解) $2|w-i|^2 = |w-1|^2$ にあいて, $w = x+yi$ (x, y : 実数) とおくと

$$2\{x^2+(y-1)^2\} = (x-1)^2 + y^2 \text{ となり, したがって } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ を得る.}$$

問 2, $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ のとき

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+i}{z+1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + i}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-1+3i+i+3}{1+1} = 1+2i \end{aligned}$$

よって、この場合の L は 2 点 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1+2i$ を通る直線である。

x 座標平面で 2 点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 2)$ を通る直線の方程式を求めると
 $y = x + 1$ となる。

ここで、 $u = x + yi$ (x, y : 実数) とおくと、

$$x = \frac{u + \bar{u}}{2}, \quad y = \frac{u - \bar{u}}{2i} \quad \text{であるから、} \quad y = x + 1 \text{ に代入して、}$$

$$\frac{u - \bar{u}}{2i} = \frac{u + \bar{u}}{2} + 1 \iff -\frac{i}{2}(u - \bar{u}) - \frac{1}{2}(u + \bar{u}) = 1$$

$$\iff \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)u + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{u} = 1 \quad (\text{答})$$

また、 x 座標平面上で $C_2: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ と直線 $L: y = x + 1$ の
 共有点を求めると、

$$(x+1)^2 + (x+1-2)^2 = 4 \quad \text{より} \quad x^2 = 1 \quad \text{となり} \quad x = \pm 1$$

$$\text{よって、} y = x + 1 \quad \text{より} \quad (x, y) = (1, 2), (-1, 0) \quad \text{となる。}$$

$$\text{よって、} \alpha = -1, \beta = 1 + 2i \quad (\text{答})$$

問 3. L が $A(\alpha)$ を通るのは、3 点 $P(z)$, $Q(w)$, $A(\alpha)$ が一直線上に
 ある場合であるから、

$$\arg\left(\frac{z - \alpha}{z - w}\right) = 0 \text{ または } \pi \quad (\text{答})$$

$$\text{問 4.} \quad \alpha = -1, \quad w = \frac{z+i}{z+1} \quad \text{より}$$

$$\frac{z - \alpha}{z - w} = \frac{z + 1}{z - \frac{z+i}{z+1}} = \frac{(z+1)^2}{z^2 - i}$$

$$z = x + yi \quad (x, y: \text{実数}) \quad \text{とおく。}$$

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{z - w} &= \frac{(x+1+i)^2}{(x+yi)^2 - i} = \frac{(x+1)^2 - y^2 + 2(x+1)yi}{x^2 - y^2 + (2xy-1)i} \\ &= \frac{\{(x+1)^2 - y^2 + 2(x+1)yi\} \{x^2 - y^2 - (2xy-1)i\}}{\{x^2 - y^2 + (2xy-1)i\} \{x^2 - y^2 - (2xy-1)i\}} \\ &= \frac{\{(x+1)^2 - y^2\}(x^2 - y^2) + 2(x+1)y(2xy-1) + \{2(x+1)y(x^2 - y^2) - \{(x+1)^2 - y^2\}(2xy-1)\}i}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy-1)^2} \end{aligned}$$

よ、 $z = \frac{z-\alpha}{z-\omega}$ が実数となる条件より、

$$2(x+1)y(x^2-y^2) - \{(x+1)^2-y^2\}(2xy-1) = 0$$

$\therefore z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ であるから

$$2(x+1)y\left\{x^2 - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)\right\} - \left\{(x+1)^2 - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)\right\}(2xy-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)y(4x^2-1) - (2x^2+2x+\frac{1}{2})(2xy-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)y(2x+1)(2x-1) - \frac{1}{2}(2x+1)^2(2xy-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\{2(x+1)y(2x-1) - (2x+1)(2xy-1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(4x^2y+2xy-2y-4x^2y-2xy+2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(2x-2y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ または } y = x + \frac{1}{2}$$

$$(i) x = -\frac{1}{2} \text{ のとき, } x^2+y^2 = \frac{1}{2} \text{ より } y^2 = \frac{1}{4} \therefore y = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{よ、 } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

$$(ii) y = x + \frac{1}{2} \text{ のとき, } x^2+y^2 = \frac{1}{2} \text{ より } x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{これより, } 8x^2+4x-1=0 \text{ より } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$y = x + \frac{1}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4} \text{ (複号同順)}$$

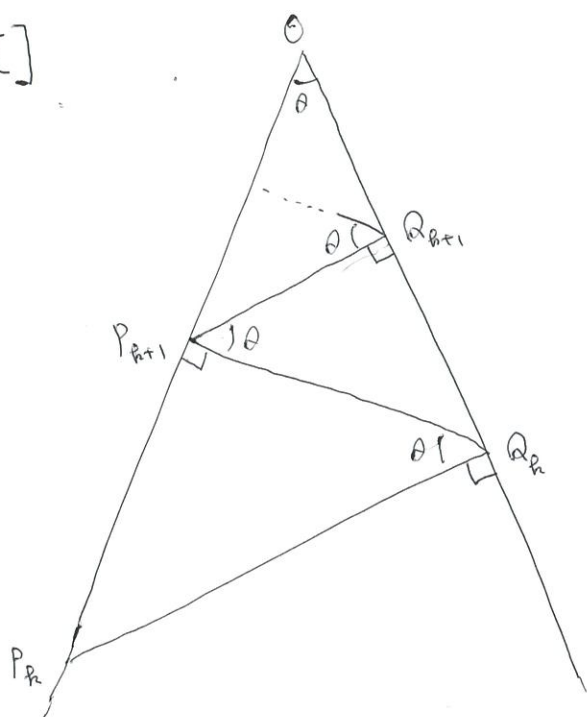
$$\text{よ、 } z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4} + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}i \text{ (複号同順)}$$

以上より、条件を満たす点 $P(z)$ は全部で 4 個 (答)

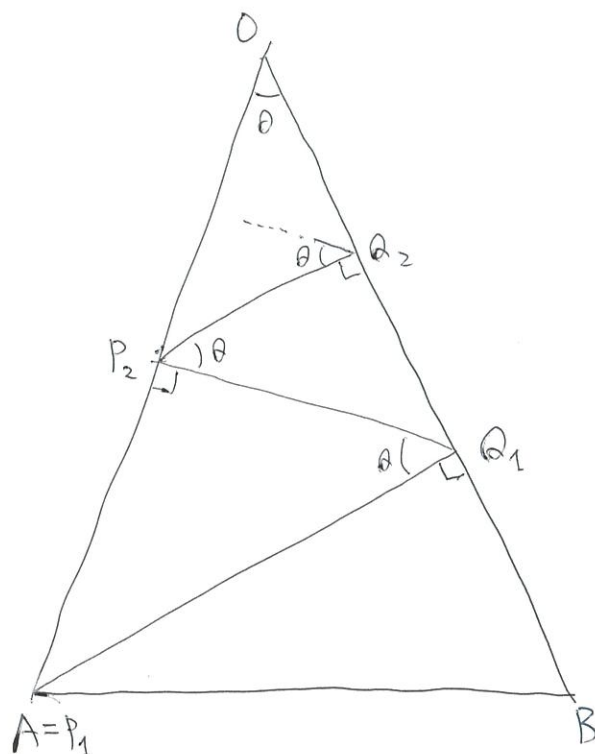
そのうち実部の値が最も大きい複素数は

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i \text{ (答)}$$

[III]



$$\begin{cases} P_n Q_{n+1} = P_n Q_n \cos \theta \\ P_{n+1} Q_{n+1} = Q_n P_{n+1} \cos \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} P_1 Q_1 = OA \sin \theta = \sin \theta \\ Q_1 P_2 = P_1 Q_1 \cos \theta = \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$P_{n+1} Q_{n+1} = P_n Q_n \cos^2 \theta$ となるので、 $\{P_n Q_n\}$ は公比 $\cos^2 \theta$ の等比数列であり、

$$P_n Q_n = P_1 Q_1 \cdot (\cos^2 \theta)^{n-1} = \sin \theta \cdot (\cos^2 \theta)^{n-1}$$

$$Q_n P_{n+1} = P_n Q_n \cos \theta = \sin \theta \cos \theta \cdot (\cos^2 \theta)^{n-1}$$

問1. $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n Q_n)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^p \theta (\cos^{2p} \theta)^{n-1}$ は、公比 $\cos^{2p} \theta$ の無限等比級数

であり、 $|\cos^{2p} \theta| < 1$ より収束して、和は $\frac{\sin^p \theta}{1 - \cos^{2p} \theta}$ である。

$\sum_{n=1}^{\infty} (Q_n P_{n+1})^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^p \theta \cos^p \theta (\cos^{2p} \theta)^{n-1}$ は、公比 $\cos^{2p} \theta$ の無限等比級数

であり、 $|\cos^{2p} \theta| < 1$ より収束して、和は $\frac{\sin^p \theta \cos^p \theta}{1 - \cos^{2p} \theta}$

より、 $\sum_{n=1}^{\infty} \{(P_n Q_n)^p + (Q_n P_{n+1})^p\}$ は収束して、和は

$$\frac{\sin^p \theta}{1 - \cos^{2p} \theta} + \frac{\sin^p \theta \cos^p \theta}{1 - \cos^{2p} \theta} = \frac{\sin^p \theta (1 + \cos^p \theta)}{(1 + \cos^p \theta)(1 - \cos^p \theta)} = \frac{\sin^p \theta}{1 - \cos^p \theta}$$

したがって、 $A_p(\theta) = \left(\frac{\sin^p \theta}{1 - \cos^p \theta} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sin \theta}{(1 - \cos^p \theta)^{\frac{1}{p}}} \quad \left(\frac{25}{100} \right)$

問 2. 問 1 と同様に $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n Q_n)^{\frac{p}{2}} = \frac{\sin^{\frac{p}{2}} \theta}{1 - \cos^{\frac{p}{2}} \theta}$ と仮定,

$$B_{\frac{p}{2}}(\theta) = \frac{\sin \theta}{(1 - \cos^{\frac{p}{2}} \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad \left(\frac{2}{p} \right)$$

問 3. $OP_n = \frac{P_n Q_n}{\sin \theta} = (\cos^2 \theta)^{n-1}$
 $OQ_n = OP_n \cos \theta = \cos \theta (\cos^2 \theta)^{n-1}$ と仮定して,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot OP_n \cdot OQ_n \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (\cos^4 \theta)^{n-1}$$

よって, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は 公比 $\cos^4 \theta$ の無限等比級数となり,

$$|\cos^4 \theta| < 1 \text{ より収束し, その和は } \frac{\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta}{1 - \cos^4 \theta} \text{ となる.}$$

したがって, $C(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2(1 - \cos^4 \theta)} \quad \left(\frac{2}{p} \right)$

問 4. $\frac{A_p(\theta) \cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)} = \frac{\frac{\sin \theta}{(1 - \cos^p \theta)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{\sin \theta}{(1 - \cos^p \theta)^{\frac{2}{p}}}}{\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{2(1 - \cos^4 \theta)}}$
 $= \frac{2 \sin \theta (1 - \cos^4 \theta)}{\cos \theta (1 - \cos^p \theta)^{\frac{3}{p}}} = \frac{2 \sin \theta (1 + \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta (1 - \cos^p \theta)^{\frac{3}{p}}}$
 $= \frac{2 \sin^3 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta (1 - \cos^p \theta)^{\frac{3}{p}}} = \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \frac{\theta^3}{(1 - \cos^p \theta)^{\frac{3}{p}}}$
 $= \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta^p}{1 - \cos^p \theta} \right)^{\frac{3}{p}}$

(i) $p=2$ のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{A_p(\theta) \cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta^2}{1 - \cos^2 \theta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta^2}{\sin^2 \theta} \right)^{\frac{3}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} = 4$$

(ii) $0 < p < 2$ のとき, $\theta \rightarrow +0$ より $0 < \cos \theta < 1$ としてよい.

このとき $\cos^p \theta > \cos^2 \theta$ となるから

$$0 < \frac{1 - \cos^p \theta}{\theta^p} < \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^p} = \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \cdot \theta^{2-p} = \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \theta^{2-p}$$

$2-p > 0$ より $\lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \theta^{2-p} = 0$ となるから,

はさみうちの原理より $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^p \theta}{\theta^p} = 0$

よって, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{A_p(\theta) \cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta^p}{1 - \cos^p \theta} \right)^{\frac{3}{p}}$ は,

正の無限大に発散する.

(iii) $2 < p$ のとき, (ii) と同様にして, $\cos^p \theta < \cos^2 \theta$ となるから,

$$\frac{1 - \cos^p \theta}{\theta^p} > \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^p} (> 0) \text{ より}$$

$$0 < \frac{\theta^p}{1 - \cos^p \theta} < \frac{\theta^p}{1 - \cos^2 \theta} = \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \theta^{p-2}$$

$p-2 > 0$ より $\lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \theta^{p-2} = 0$ となるから

はさみうちの原理より $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^p}{1 - \cos^p \theta} = 0$

よって, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{A_p(\theta) \cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{\theta^p}{1 - \cos^p \theta} \right)^{\frac{3}{p}} = 0$

以上 (i), (ii), (iii) より,

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{A_p(\theta) \cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}$ の極限が存在し, かつその極限値が正となる

ための p に課する必要十分条件は $p = 2$ (答)

そのときの極限値は 4 (答)

[IV] 問1. $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$ (n は 0 以上の整数) とおく.

$x > 0$ で $f_N(x) > 0$ ($N=0, 1, 2, \dots$) となることを数学的帰納法で示す.

[A] $N=0$ のとき.

$f_0(x) = e^x - 1$ であり $f_0'(x) = e^x > 0$ より $f_0(x)$ は単調増加し.

$x > 0$ で $f_0(x) > f_0(0) = 0$ が成立する.

[B] $N=n$ のとき $x > 0$ で $f_n(x) > 0$ が成り立つと仮定すると.

$$f_{n+1}(x) = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{より} \quad f_{n+1}'(x) = e^x - \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = e^x - \frac{x^n}{n!} = f_n(x) > 0$$

よって、 $x > 0$ で $f_{n+1}(x)$ は単調増加し.

$x > 0$ で $f_{n+1}(x) > f_{n+1}(0) = 1 > 0$ が成立する.

したがって、 $N=n+1$ のとき $x > 0$ で $f_{n+1}(x) > 0$ が成立する.

以上 [A][B] から、数学的帰納法により、0 以上のすべての整数 N に対し

$f_N(x) > 0$ となる $e^x > \frac{x^N}{N!}$ が成り立つ. (証明終)

問2 (1) $I_0(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^M x^{m-1} e^{-x^m} dx \right)$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{M^m} e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt \right)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{m} \cdot e^{-t} \right]_0^{M^m}$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m} \cdot e^{-M^m} + \frac{1}{m} \right)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} \right)^{M^m} \right\}$$

$$= \frac{1}{m} \quad \left(0 < \frac{1}{e} < 1 \right)$$

$$\therefore I_0(m) = \frac{1}{m} \quad \left(\frac{1}{e} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} t = x^m \quad \text{とおく} \\ \frac{dt}{dx} = mx^{m-1} \quad \text{より} \\ x^{m-1} dx = \frac{1}{m} dt \\ \frac{x}{t} \Big|_0 \rightarrow M \\ \frac{t}{t} \Big|_0 \rightarrow M^m \end{array} \right)$$

問 2 (2) (1)と同様に置換すると.

$$\begin{aligned} I_n(m) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{M^m} x^{m+n-1} e^{-x^m} dx \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{M^m} (x^m)^n e^{-x^m} \cdot x^{m-1} dx \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{M^m} t^n e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt \right) \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

このとき、同様の置換により、

$$\begin{aligned} I_{n+1}(m) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^{M^m} t^{n+1} e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} [t^{n+1} \cdot (-e^{-t})]_0^{M^m} - \frac{1}{m} \int_0^{M^m} (n+1)t^n (-e^{-t}) dt \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m} \cdot M^{m(n+1)} \cdot e^{-M^m} + (n+1) \int_0^{M^m} t^n e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m} \cdot \frac{(M^m)^{n+1}}{e^{M^m}} + (n+1) \int_0^{M^m} t^n e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt \right) \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

ここで、問 1 の結果より、 $N = n+2$, $x = M^m$ とし、

$$e^{M^m} > \frac{(M^m)^{n+2}}{(n+2)!}$$

が成り立つので、

$$0 < \frac{(M^m)^{n+1}}{e^{M^m}} < \frac{(n+2)!}{M^m}$$

ここで、 $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{M^m} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(M^m)^{n+1}}{e^{M^m}} = 0$$

よって、 $I_n(m)$ の存在を仮定すると、②は収束し $I_{n+1}(m)$ は存在して、

$$I_{n+1}(m) = (n+1) I_n(m) \quad \left(\frac{n}{m} \right)$$

問 2 (3) $J_p(n) = \int_0^p t^n e^{-t} dt$ とおく. (p は正の実数, n は 0 以上の整数)

$$\begin{aligned} J_p(n+1) &= \int_0^p t^{n+1} e^{-t} dt = [t^{n+1}(-e^{-t})]_0^p - \int_0^p (n+1)t^n(-e^{-t}) dt \\ &= -p^{n+1}e^{-p} + (n+1) \int_0^p t^n e^{-t} dt = -p^{n+1}e^{-p} + (n+1)J_p(n) \end{aligned}$$

よって, $J_p(n+1) = -p^{n+1}e^{-p} + (n+1)J_p(n)$

両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{J_p(n+1)}{(n+1)!} = -\frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{-p} + \frac{J_p(n)}{n!}$$

よって, $\frac{J_p(k)}{k!} - \frac{J_p(k-1)}{(k-1)!} = -\frac{p^k}{k!} \cdot e^{-p} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$

よって, $\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{J_p(k)}{k!} - \frac{J_p(k-1)}{(k-1)!} \right\} = -\sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-p}$

したがって, $\frac{J_p(n)}{n!} - \frac{J_p(0)}{0!} = -\sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-p}$

よって, $J_p(0) = \int_0^p e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^p = -e^{-p} + 1$ より,

$$\frac{J_p(n)}{n!} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-p}$$

よって $J_p(n) = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} e^{-p} \right)$

$$\int_0^p t^n e^{-t} dt = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} e^{-p} \right)$$

両辺に $\frac{1}{m}$ を掛けたら

$$\int_0^p t^n e^{-t} \frac{1}{m} dt = \frac{n!}{m} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} \cdot e^{-p} \right)$$

$p = M^m$ とおくと

$$\int_0^{M^m} t^n e^{-t} \cdot \frac{1}{m} dt = \frac{n!}{m} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot e^{-M^m} \right)$$

$x^m = t$ の置換により

$$\int_0^M x^{mn+m-1} e^{-x^m} dx = \frac{n!}{m} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot e^{-M^m} \right)$$

ここで、問 1 で示した不等式で、 $N=n+1$, $x=M^m$ とすると、

$$e^{M^m} > \frac{(M^m)^{n+1}}{(n+1)!}$$

よって、

$$0 < \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot e^{-M^m} < \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot \frac{(n+1)!}{(M^m)^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} \cdot \frac{1}{(M^m)^{n+1-k}}$$

ここで、 $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} \cdot \frac{1}{(M^m)^{n+1-k}} = 0$ となるので、

はさみうちの原理より、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot e^{-M^m} = 0$$

(n が、 n 次の極限は収束する。

$$\begin{aligned} I_n(m) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^M x^{mn+m-1} \cdot e^{-x^m} dx \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{n!}{m} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(M^m)^k}{k!} \cdot e^{-M^m} \right) \\ &= \frac{n!}{m} \end{aligned}$$

以上より、 $I_n(m)$ は存在し、

$$I_n(m) = \frac{n!}{m} \quad \left(\frac{n!}{m} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{問3. } L_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m-1}} \left\{ \frac{I_{mn}(m)}{I_n(m)} \right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \left\{ \frac{\frac{(mn)!}{m}}{\frac{n!}{m}} \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m-1}} \left\{ \frac{(mn)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{1}{n^{m-1}} \left\{ \frac{(mn)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{1}{n^{m-1}} \{ (n+1)(n+2)(n+3) \cdots (mn-1) \cdot mn \}^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (mn-1)mn}{n^{nm-n}} \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+3}{n} \cdots \frac{mn-1}{n} \cdot \frac{mn}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{(m-1)n-1}{n}\right) \left(1 + \frac{(m-1)n}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \log \left(1 + \frac{3}{n}\right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots + \log \left(1 + \frac{(m-1)n-1}{n}\right) + \log \left(1 + \frac{(m-1)n}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{(m-1)n} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^{m-1} \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - (1+x) \right]_0^{m-1} = m \log m - m + 1 \\ &= \log(m^m) - \log(e^{m-1}) = \log \left(\frac{m^m}{e^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

∴ $L_m = \log \left(\frac{m^m}{e^{m-1}} \right)$ (※連続関数の数で表すことができる)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m-1}} \left\{ \frac{(mn)!}{n!} \right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{m^m}{e^{m-1}}$$

$$\therefore \text{答} \quad L_m = \frac{m^m}{e^{m-1}} \quad \left(\frac{m^m}{e^{m-1}} \right)$$