医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和大学（Ⅱ期）試験　数学　試験日3月2日（土）

1 (1) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ より $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

これを解いて、 $z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$ …(答)

($z=0$ をみたす)

$z=\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}$ より $z^{2024}=\cos 506\pi+i\sin 506\pi=1$

だから

$$z^{2024}+\frac{1}{z^{2024}}=1+\frac{1}{1}=2 \quad \cdots(答)$$

(2) $z\neq 0$ であり、 $z+\frac{1}{z}$ が実数だから

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$$

$$z+\frac{1}{z}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$$

$$(z-\bar{z})\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)=0$$

よって z が表す点全体は 実軸上の点(原点を除く)

または 原点中心、半径1の円である。 …(答)

(3) $|w+2-2i|=1$ は 中心 $-2+2i$、半径1の円を

表すから、 $z=\bar{z}$ のとき $|z-w|$ の最小値は 2、

$|z|=1$ のとき $|z-w|$ の最小値は $|-2+2i|-(1+1)=2\sqrt{2}-2$

$2\sqrt{2}-2<2$ より $|z-w|$ の最小値は $2\sqrt{2}-2$ …(答)

(4) (4-1) 第n群($n\geqq 2$)は ${}_{n-1}C_0, {}_{n-1}C_1, \cdots, {}_{n-1}C_{n-1}$

だから 和は二項定理より 2^{n-1} …(答)

(4-2) $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=2^n-1$ …(答)

$\boxed{2}$ (1) 真数条件より $1-3x>0$ かつ $x+3>0$ ∴ $-3<x<\frac{1}{3}$ …①

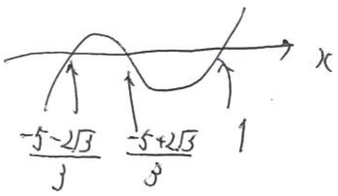
不等式は $\log_2(1-3x)+\frac{1}{2}\log_2(x+3)\leqq 2$

$\log_2(1-3x)^2(x+3)\leqq 4$

$(1-3x)^2(x+3)\leqq 16$

$9x^3+21x^2-17x-13\leqq 0$

$(x-1)(9x^2+30x+13)\leqq 0$



$x\leqq\frac{-5-2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x\leqq 1$

①とから $-3<x\leqq\frac{-5-2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\frac{1}{3}$ …(答)

(2) $x=n+\alpha$ (n:整数, $0\leqq\alpha<1$) とおくと.

$3x=3n+3\alpha$

(ア) $0\leqq\alpha<\frac{1}{3}$ のとき $0\leqq 3\alpha<1$ より $[3x]=3n$, $[x]=n$ だから

$3n-n=2$ ∴ $n=1$ ∴ $1\leqq x<\frac{4}{3}$

(イ) $\frac{1}{3}\leqq\alpha<\frac{2}{3}$ のとき, $1\leqq 3\alpha<2$ より $[3x]=3n+1$, $[x]=n$ だから

$(3n+1)-n=2$ ∴ $n=\frac{1}{2}$ (不適)

(ウ) $\frac{2}{3}\leqq\alpha<1$ のとき $2\leqq 3\alpha<3$ より $[3x]=3n+2$, $[x]=n$ だから

$(3n+2)-n=2$ ∴ $n=0$ ∴ $\frac{2}{3}\leqq x<1$

(ア)〜(ウ)より $\frac{2}{3}\leqq x<\frac{4}{3}$ …(答)

(3) $\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{2x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$

等号は $x=1$ のとき成り立つから 最小値 $\frac{9}{2}$ …(答)

(4) $x+y=u$, $xy=v$ とおくと. x, y を2解とする t の方程式

$t^2-ut+v=0$ は実数解をもつから $u^2-4v\geqq 0$ …②

$x^2+xy+y^2=1$ より $u^2-v=1$ ∴ $v=u^2-1$

①に代入して $u^2-4(u^2-1)\geqq 0$ ∴ $-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq u\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$ …③

このとき $x+2xy+y=u+2v=u+2(u^2-1)=2\left(u+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$

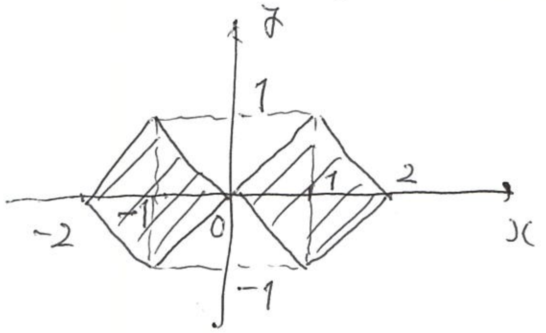
③より $u=\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき 最大値 $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

$u=-\frac{1}{4}$ のとき 最小値 $-\frac{17}{8}$ …(答)

(5) $||x|-1|+|y| \leqq 1$ …④ で y の代わりに $-y$ を入れても変わらないから ④ は y 軸対称。$x \geqq 0$ のとき ④ は

$|x-1|+|y| \leqq 1$

求める領域は これと これを y 軸対称したものだから以下のようになる。（境界を含む）



3 (1) ② を $y=mx+n$，① と ② の接点の x 座標を $\alpha_1, \beta_1 (\alpha<\beta)$ とおくと

$x^4-4x^2+4x+2-(mx+n)=(x-\alpha_1)^2(x-\beta_1)^2$

(右辺) $=x^4-2(\alpha_1+\beta_1)x^3+(\alpha_1^2+4\alpha_1\beta_1+\beta_1^2)x^2-2\alpha_1\beta_1(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1^2\beta_1^2$

係数を比較して

$-2(\alpha_1+\beta_1)=0$，$\alpha_1^2+4\alpha_1\beta_1+\beta_1^2=-4$，$4-m=-2\alpha_1\beta_1(\alpha_1+\beta_1)$，$2-n=\alpha_1^2\beta_1^2$

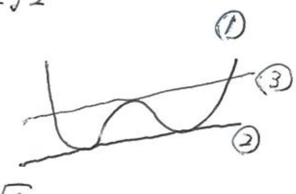
これらを解いて，$\alpha_1+\beta_1=0$，$\alpha_1\beta_1=-2$ （$\alpha_1=-\sqrt{2}$，$\beta_1=\sqrt{2}$），$m=4$，$n=-2$

よって ② は $y=4x-2$ …(答)

(2) ① より $y'=4x^3-8x+4$，$y'=4$ のとき $x=0, \pm\sqrt{2}$

③ の接点の x 座標は $x=0$

よって ③ は $y=4x+2$ …(答)



(3) $S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2\,dx=\frac{1}{30}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^5=\frac{64\sqrt{2}}{15}$ …(答)

(4) ① と ③ の共有点の x 座標は $x^4-4x^2+4x+2=4x+2$ より $x=0, \pm 2$

$S_2=\int_{-2}^{2}-(x^4-4x^2)\,dx=2\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=2^6\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{15}$ …(答)

(5) 求める放物線を $y=g(x)$ （$g(x)$ は2次式の整式）とおくと

$g(\alpha)=f(\alpha)$，$g(\beta)=f(\beta)$，$g(\gamma)=f(\gamma)$

であり，

$f(x)-g(x)=0$ は $x=\alpha, \beta, \gamma$ を解にもち，α, β, γ は

$f'(x)=4(x^3-2x+1)=0$ の解だから，$f(x)-g(x)$ は

$x^3-2x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ で割り切れる．そのときの

商を $h(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=(x^3-2x+1)h(x)$$

$$f(x)=(x^3-2x+1)h(x)+g(x)$$

となり $g(x)$ は $f(x)$ を x^3-2x+1 で割ったときの余りである

$$f(x)=(x^3-2x+1)\times x-2x^2+3x+2$$

だから求める放物線の方程式は $y=-2x^2+3x+2$ …(答)

$\boxed{4}$ ある人がAにかかっている事象を A，X で陽性となる事象を X，

2回の検査でともに陽性となる事象を Y とする．

(1) $P(A\cap X)=P(A)\cdot P_A(X)=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{1000}$ …(答)

(2) $P(X)=P(A)\cdot P_A(X)+P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(X)$

$=\dfrac{7}{1000}+\dfrac{99}{100}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{106}{1000}=\dfrac{53}{500}$ …(答)

(3) $P_X(A)=\dfrac{P(X\cap A)}{P(X)}=\dfrac{\frac{7}{1000}}{\frac{106}{1000}}=\dfrac{7}{106}$ …(答)

(4) $P_{\overline{X}}(\overline{A})=\dfrac{P(\overline{X}\cap\overline{A})}{P(\overline{X})}=\dfrac{\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{10}+\frac{99}{100}\cdot\frac{9}{10}}=\dfrac{99\cdot 3}{1+99\cdot 3}=\dfrac{297}{298}$ …(答)

(5) $P_Y(A)=\dfrac{P(Y\cap A)}{P(Y)}=\dfrac{\frac{1}{100}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}=\dfrac{49}{49+99}=\dfrac{49}{148}$ …(答)

〈講評〉

$\boxed{1}$（標準）

(1) ド・モアブルの定理　(2) 複素数の実数条件

(3) 2円の最短距離，円と直線の距離（図形的な処理）

(4) 群数列：二項係数でできた数列であることに気付ければよい。

$\boxed{2}$（標準）

(1) 対数不等式：計算量がやや多いが普通

(2) $[3x]$ より 小数部分の場合分けにもちこめばやりやすい。

(3) 相加・相乗平均の不等式

(4) 2式とも対称式だから $x+y=u$，$xy=v$ のようにして，u，v の話にもちこむとよい。u，v の条件に気をつける。

(5) 対称性を考えれば，よくある領域になる。

$\boxed{3}$（標準）

(1) 4次関数の複接線　(2) 傾きが与えられた接線

(3) 公式が使えると早い。(4) 普通の面積

(5) $f(x)-$（放物線）$=0$ の解に着目できるとよい

$\boxed{4}$（基本）　条件付き確率

$\boxed{1}$(4)，$\boxed{2}$(2)(4) $\boxed{3}$(5) が考えにくいので 70%ぐらい取れればよい。