

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本大学 (2期) 1次 数学 試験日 3月4日 (月)



I

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x}{6} \geq \frac{x}{2} - \frac{1}{3} & \dots \textcircled{1} \\ |2x+5| < 8 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{より } x \geq 3x-2. \\ x \leq 1 \dots \textcircled{1}' \end{array} \right.$$

また $\textcircled{2}$ より $-8 < 2x+5 < 8$

$$-\frac{13}{2} < x < \frac{3}{2} \dots \textcircled{2}' \quad \textcircled{1}' \textcircled{2}' \text{をみた可整数は, } -6 \text{ から } 1 \text{ まで } \underline{\underline{8 \text{ 個}}}$$

(2) 平均値を並べかえると, 1, 2, 5, 9, 13, x

中央値が 6 になるのは, $5 \leq x \leq 9$ のときで, $\frac{5+x}{2} = 6$, $\underline{\underline{x=7}}$

このとき, $Q_1=2$, $Q_3=9$ となり, 四分位範囲は $9-2=\underline{\underline{7}}$

(3) 実数係数の 2 次方程式 となる, $x=2-\sqrt{3}i$ が解ならば, $2+\sqrt{3}i$ も解となる。

解と係数の関係より, $a = -\{(2-\sqrt{3}i) + (2+\sqrt{3}i)\} = \underline{\underline{-4}}$

$$b = (2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i) = \underline{\underline{7}}$$

(4) 等比数列の和 となるので, $S = \frac{3(r^{10}-1)}{r-1}$, $r=2$ のとき $S = \underline{\underline{3069}}$

また, $r=1$ のときは $S = 3 \times 10 = \underline{\underline{30}}$

(5) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ より $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\underline{-1}}$$

また $|\vec{a} - \vec{b}|^2$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 1 - 2 \times (-1) + 1$$

$$= 4 \quad \therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\underline{2}}$$

II

$$C = (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$l: mx - y + m + 1 = 0$$

円Cは中心(3, -1). 半径2の円. この直線lが異なる2点で交わる条件は, lと点(3, -1)の距離が2未満. (点と直線の距離).

$$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+1}} < 2 \quad \therefore |4m+2|^2 < 2^2 \times (\sqrt{m^2+1})^2$$

$$(2m+1)^2 < m^2+1$$

$$\frac{-4}{3} < m < 0$$

$\triangle ABC$ において, Cが中心, AとBが円C上の点

である. $CB = CA = 2$.

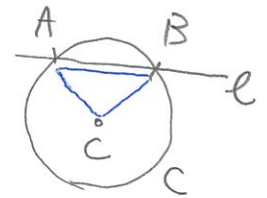
$\triangle ABC$ が直角二等辺三角形ならば, $\angle ACB = 90^\circ$.

この条件は, lと点C(3, -1)の距離が $\frac{1}{\sqrt{2}} AC (= \sqrt{2})$ となること.

$$\frac{|4m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2} \quad |4m+2|^2 = 2 \times (\sqrt{m^2+1})^2$$

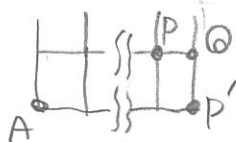
$$7m^2 + 8m + 1 = 0$$

$$(7m+1)(m+1) = 0 \quad m = -\frac{1}{7}, m = -1$$



III. (1) Pは, 5つの交差点(点Aも交差点とする)のうち, 1回を上, 4回を右に移動すると到達する. この確率は $5C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$.

(2) Q点の下点をP'とする. Qを通るためには,



(i) Pを通り2回へ移動. (ii) P'を通るのいずれか一方である.

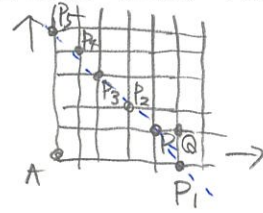
$$(i) \text{の確率は } 5C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{64}$$

$$(ii) \text{の } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\therefore Qを通る条件のもとPも通る確率は $\frac{\frac{5}{64}}{\frac{5}{64} + \frac{1}{32}} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$$$

<別解> 平安京の端をなくせば"単純計算"できる。

- (1) $P, P_1 \sim P_5$ のいずれかを通るの2。
 P を通る確率は $\frac{5}{32}$ 。



TV

$$(1) f(x) = 2\sin^2 x + \cos x - 1 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$= 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1$$

$\cos x = t$ とおくと。

$$f(t) = -2t^2 + t + 1 \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

$$f'(t) = -4t + 1 \quad f'(t) = 0 \text{ とおくと } t = \frac{1}{4}, \text{ したがって } -1 \leq t \leq 1 \text{ を満たす。}$$

最大値は $t = \frac{1}{4}$ のときの $\frac{9}{8}$

最小値は $t = -1$ のときの -2

t	-1	...	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1
$f'(t)$		+			0		-
$f(t)$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0

$$(2) g(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{x + (x + \frac{\pi}{3})}{2} \cos \frac{x - (x + \frac{\pi}{3})}{2}$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$x + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと $g(t) = \sqrt{3} \sin t \quad (\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi)$

$g'(t) = \sqrt{3} \cos t$. $g'(t) = 0$ とおくと $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 範囲内では $\frac{\pi}{2}$.

最大値は $t = \frac{\pi}{2}$ のときの $\sqrt{3}$

最小値は $t = \frac{7}{6}\pi$ のときの $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

t	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$
$g'(t)$		+	0		-
$g(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(3) h(x) = 2\sin x + 3\cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$= \sqrt{13} \sin(x+\alpha). \quad \text{ただし } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{最大値は } x+\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \sqrt{13}.$$

$$\text{また, } \tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (x = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ のとき}).$$

$$= \frac{1}{\tan \alpha}.$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{V (1)} \quad f(x) &= \int_x^{x+1} |\log t| dt = \int_1^{x+1} \log t dt + \int_x^1 (-\log t) dt \\ &= \int_1^{x+1} \log t dt + \int_1^x \log t dt \end{aligned}$$

$$f'(x) = \log(x+1) + \log x = \log x(x+1)$$

$$\text{よって } 0 < x < 1 \text{ のとき, } f'(x) = \log x(x+1) \quad (2)$$

$$\text{また, } f(x) = \int_x^{x+1} \log t dt$$

$$f'(x) = \log(x+1) - \log x$$

$$\text{よって } 1 < x \text{ のとき, } f'(x) = \log \frac{x+1}{x} \quad (3)$$

$$(2) \quad f'(x) = 0 \text{ と仮定して } x \text{ を求める.}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき, } f'(x) = \log x(x+1) = 0 \quad \therefore x(x+1) = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0$$

$$1 < x \text{ のとき } f'(x) = \log \frac{x+1}{x} = 0. \quad \therefore \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\text{両辺 } x \text{ 倍して } x+1 = x \quad \text{よって満たす } x \text{ は存在しない}$$

よ、 $x = \alpha$ が最小値をとるから、

$0 < x = \alpha < 1$ であり、 α は $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ を満たす。

(3). (2) より $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. $0 < \alpha < 1$ より $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

このとき $f(\alpha) = \int_1^{\alpha+1} \log t dt + \int_1^{\alpha} \log t dt$

$$= [t \log t - t]_1^{\alpha+1} + [t \log t - t]_1^{\alpha}$$

$$= (\alpha+1) \log(\alpha+1) - (\alpha+1) - (\log \alpha - 1)$$

$$+ \alpha \log \alpha - \alpha - (\log \alpha - 1)$$

$$= (\alpha+1) \log(\alpha+1) + \alpha \log \alpha - 2\alpha + 1$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \log \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - (-1+\sqrt{5}) + 1$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{2(1-\sqrt{5})} = \frac{-4}{2(1-\sqrt{5})} = \frac{-2}{1-\sqrt{5}} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

よ、 $f(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \log \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \log \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - (-1+\sqrt{5}) + 1$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \log \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \log \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 - \sqrt{5}$$

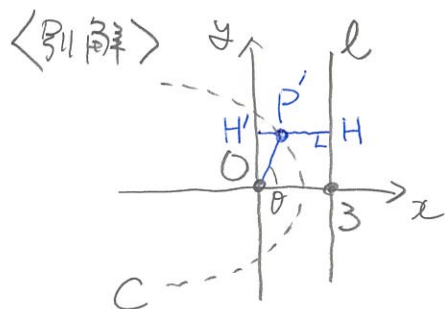
$$= \log \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 - \sqrt{5}$$

VI

(1) 放物線の極方程式 $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta}$, $\varepsilon = 1$. また $\theta = 0$ のとき $r = \frac{3}{2}$ なのぞ
 $l = 3$

$$\therefore r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$$

(放物線は、焦点と準線の中点を通る)

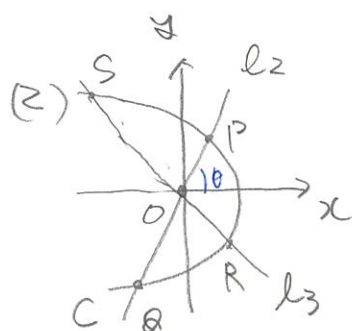


$$\begin{aligned} OP' &= r, \quad P'H = HH' - P'H' \\ &= 3 - r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 3 - r \cos \theta \end{aligned}$$

放物線は $OP' = P'H$ なのぞ

$$r = 3 - r \cos \theta$$

$$\therefore r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$$



$P(r, \theta)$ とすると, $Q(r_1, \theta + \pi)$ となる.

$$OQ = \frac{3}{1 + \cos(\theta + \pi)} = \frac{3}{1 - \cos \theta}$$

$$\therefore \frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} = \frac{1 + \cos \theta}{3} + \frac{1 - \cos \theta}{3} = \frac{2}{3}$$

また, $R(r_2, \theta - \frac{\pi}{2})$, $S(r_3, \theta + \frac{\pi}{2})$ とする.

$$OR = \frac{3}{1 + \cos(\theta - \frac{\pi}{2})} = \frac{3}{1 + \sin \theta}$$

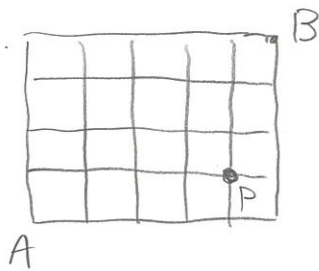
$$\text{同様} \rightarrow OS = \frac{3}{1 - \sin \theta}$$

$$\text{よ} \rightarrow PQ = OP + OQ = \frac{6}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$RS = OR + OS = \frac{6}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\text{よ} \rightarrow \frac{1}{PQ} + \frac{1}{RS} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{6} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{6} = \frac{1}{6}$$

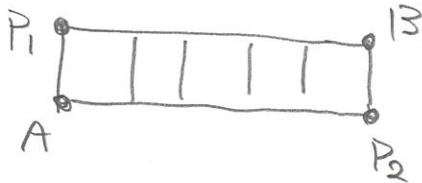
※ III



AP 5とおり, PB 4とおり, AB 126 とおり
だから確率 $\frac{5 \times 4}{126}$ はちょっとX.

とゆえに「~とおり」の確率が「ちがう」.

例えば,

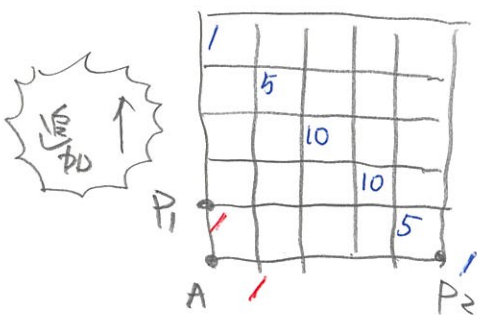


AからP1をとってBに行くのは1とおり
" P2 " 1とおり

だから P1とP2は等確率ではない.

答は, Aから1回上に行けばP1にすぐ行けるので, P1に行く確率は $\frac{1}{2}$.
しかし Aから5回の選択肢を全て右に行かないとP2には行けぬので,
P2に行く確率は $\frac{1}{32}$.

1つの解決は, 行き止まりをなくして考えればよい.



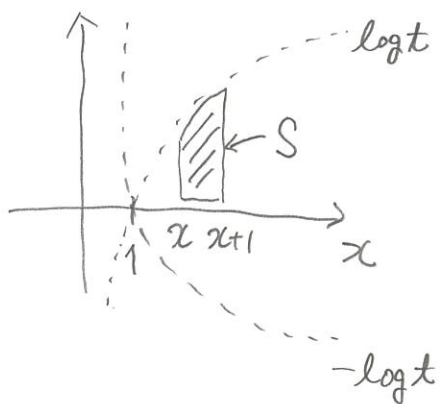
これだと, P1は確率 $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

P2 " $\frac{1}{1+5+10+10+5+1} = \frac{1}{32}$

とすぐでOK

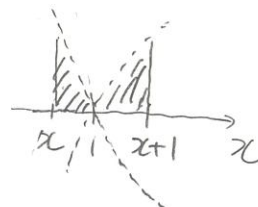
V

たとえば...



このSが $f(x)$ になっている.

だから, xとx+1の間に1区間あれば, 2つの区間に
切って計算する.



$$S = S_1 + S_2 = \int_1^{x+1} \log t \, dt + \int_x^1 -\log t \, dt$$

とL2 (2)は(3)の誘導.