

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

聖マリアンナ医科大学（後期）試験 数学 試験日3月5日（火）



II

(1). $P \dots 12$ $I \dots 30$

これは 20 面数 $\times 3$ 角形 $\div 2$ 重複 $= 30$ 個

オイラーの多面体定理 $v - e + f = 2$ より 頂点 12 .

(2). 方向ベクトル $\overrightarrow{P_0P_1} = (2, 1, -2)$. より, 直線の式 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$

$z=0$ 代入して. $x-1=2y-2=2$. $\therefore x=3, y=2$ $(3, 2, 0)$

(<別解> 共有点 $(x, y, 0)$ とすると, 直線の化简より $\left. \begin{aligned} \frac{-1-1}{1-x_1} &= \frac{4-2}{2-0} \\ \frac{0-1}{1-y_1} &= \frac{4-2}{2-0} \end{aligned} \right\}$

また, H の座標は $(1-2t, 1-t, 2+2t)$ と表せると,

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0$ より, $(1-2t) \times 2 + (1-t) \times 1 + (2+2t) \times (-2) = 0$.

$t = -\frac{1}{9}$ $\therefore |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{53}}{3}$

(3). $\sin \frac{9}{10} \pi + \cos \frac{6}{10} \pi = \sin \left(\pi - \frac{1}{10} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10} \pi \right)$.

$= \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = 0$

また $\sin 3\theta + \cos 2\theta = 0$ より,

$(3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) + (1 - 2\sin^2 \theta) = 0$.

$4\sin^3 \theta + 2\sin^2 \theta - 3\sin \theta - 1 = 0$

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (0 < x \leq 1; \theta = \frac{3}{10}\pi \text{ のとき } x = \sin \theta > 0) \text{ を解く。}$$

$$x = -1 \text{ を解にもとめる, } (x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 0.$$

$$\text{解は } x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad 0 < x \leq 1 \text{ より } \sin \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

[2] (1) A は $2k \leq n$ を満たす最大の整数 k . $\therefore A = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. (b)

$$\text{また } \sqrt{5} b_n = \sum_{k=0}^B n C_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} \text{ より,}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^B n C_{2k+1} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} \text{ となる.}$$

$$\text{よって } 2k+1 \leq n \text{ を満たす最大の整数 } k. \therefore B = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \text{ (a)}$$

$$(2) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+(-\sqrt{5})}{2}\right)^n = \underline{a_n - b_n \sqrt{5}} \quad \dots (*)$$

$$(3) \text{ 2式 } (*), (**) \text{ より.}$$

$$(*) + (**) \text{ より } a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$(*) - (**) \text{ より } b_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n \cdot 2\sqrt{5}}{\left\{ \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5} \left\{ 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \right\}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} \end{aligned}$$

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{5}(1+0)}{1-0} = \underline{\sqrt{5}}$$

③ (1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ より, $f(3) = 9\{3 \times (3)^2 - 4 \times (3) - 12\} = \underline{27}$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x+1)(x-2)$$

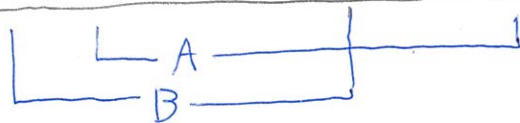
から, 増減は右図.

極大値は $x=0$ であり ± 0

最大値は $x=3$ " $\underline{27}$

最小値は $x=2$ " $\underline{-32}$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	32	-5	0	-13	-32	27



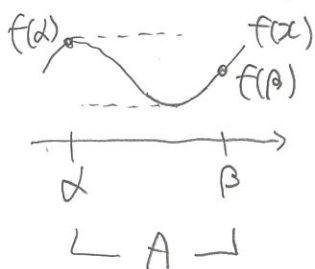
(2) $A \cup B = [-2, 3]$ であり, 問題文は, $-2 \leq x \leq 3$ での $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ, ということなので, $\underline{-32} \leq y \leq \underline{27}$

(3) 問題文は「 $A (-1 \leq x \leq 3)$ での $f(x)$ の範囲 または $B (-2 \leq x \leq 1)$ での $f(x)$ の範囲を求めよ」ということ。 $A (-32 \leq y \leq 27)$ または $B (-13 \leq y \leq 32)$ なので, $\underline{-32} \leq y \leq \underline{32}$.

(4) $A \cap B = [-1, 1]$ であり, 問題文は (2) と同様なので, $\underline{-13} \leq y \leq \underline{0}$

(5) (3) の「または」を「かつ」に変えて, $\underline{-13} \leq y \leq \underline{27}$

✖ グラフをかくと, 問題文もわかりやすくなる。



$f(x) = y$ を満たす A の要素 x が存在する.

$\rightarrow \alpha < x < \beta$ における y の範囲.

- 4 (1) $y=f(x)$ と $y=mx$ が 3 点を共有するのと、 $f(x)=mx$ が異なる 3 つの実数解を持つとはいい。 $x(x-1)(x-3)=mx$

$$x \{x^2 - 4x + (3-m)\} = 0 \quad \text{--- ①}$$

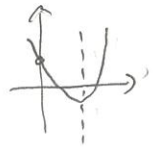
よって $x^2 - 4x + (3-m)$ が 0 以外の異なる実数解を 2 つ持つとはいい。

また、 $0 < x_1 < x_2$ より、この 2 つの実数解は正の数である。

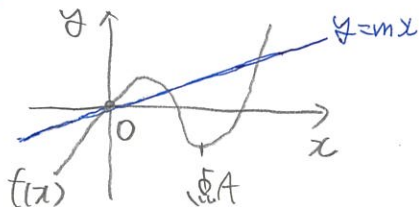
この条件は、判別式 $D > 0$ かつ、軸 $4 > 0$ かつ、 $f(0) = 3-m > 0$

である。

$$D = 4 + 4m > 0 \quad \text{かつ} \quad 3-m > 0 \quad \text{より} \quad \underline{-1 < m < 3}$$



※ ①よりグラフをかくと。



m の最大値は、 $y=mx$ が原点で $f(x)$ と接するとき、

“最小値は、” “点 A あたり” “

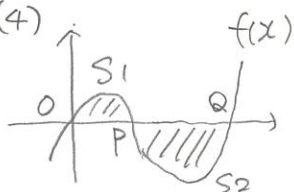
- (2) ①式の解と係数の関係より、 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 3-m$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \underline{2m + 10}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \underline{12m + 28}$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (2m + 10)^2 - 2(3-m)^2 \\ &= \underline{2m^2 + 52m + 82} \end{aligned}$$

(3), (4)



$$S_1 = \int_0^{x_1} \{x^3 - 4x^2 + (3-m)x\} dx$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} \{-x^3 + 4x^2 + (3-m)x\} dx$$

$$S_1 = S_2 = 1 = 2 \text{ 平方}. \quad 2S_1 - S_2 = 0$$

$$2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3-m}{2}x^2 \right]_0^{x_1} - \left(- \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3-m}{2}x^2 \right]_{x_1}^{x_2} \right) = 0$$

$$2 \left(\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{4}{3}x_1^3 + \frac{3-m}{2}x_1^2 \right) + \left(\frac{1}{4}x_2^4 - \frac{4}{3}x_2^3 + \frac{3-m}{2}x_2^2 \right) - \left(\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{4}{3}x_1^3 + \frac{3-m}{2}x_1^2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4) - \frac{4}{3}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{3-m}{2}(x_2^2 + x_1^2) = 0$$

$$\frac{1}{4}(2m^2 + 52m + 82) - \frac{4}{3}(12m + 28) + \frac{3-m}{2}(2m + 10) = 0$$

$$-\frac{1}{2}m^2 - 5m - \frac{11}{6} = 0$$

$$m = \frac{-15 \pm 8\sqrt{3}}{3}$$

$$(1)より -1 < m < 3 \text{ なのだから, } -3 < -15 \pm 8\sqrt{3} < 9,$$

$$\frac{3}{2} < \pm\sqrt{3} < 3$$

$$m = \frac{-15 + 8\sqrt{3}}{3} \text{ のとき条件を満たす. } m = \frac{-15 + 8\sqrt{3}}{3}$$

※ うまく誘導が作られていたが、序盤でつまづくとその後4分の計算に費やすことになり（まう）。