医学部専門予備校　クエスト　解答速報

杏林大学（医）数学

試験日 1 月 23 日（木）

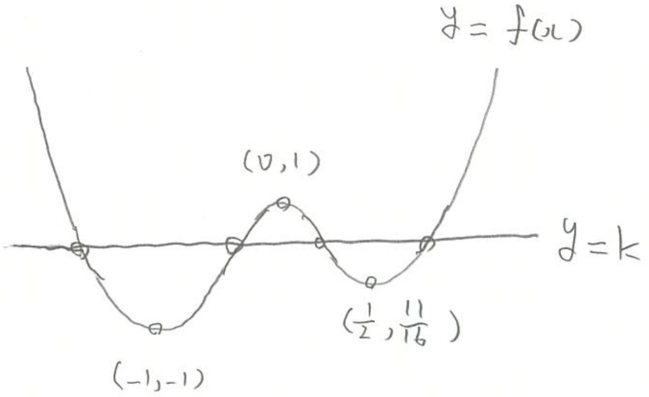
Ⅰ $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$

(a) $f'(x)=12x^3+6x^2-6x$

$=6x(2x^2+x-1)$

$=6x(2x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{11}{16}$	$\nearrow$



したがって、

$\frac{11}{16}<k<1$ のとき、

$f(x)=k$ は異なる4つの実数解をもつ。

$f(x)=\frac{11}{16}$

$\Longleftrightarrow 3x^4+2x^3-3x^2+1=\frac{11}{16}$

$\Longleftrightarrow 3x^4+2x^3-3x^2+\frac{5}{16}=0$

の解を α, β, $\frac{1}{2}$（重解）とすると、

$\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$ より、

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$

(b) $g(x)=0$ の解を $x=-1+\sqrt{2}i,\ -1-\sqrt{2}i$ とすると、

$g(x)=\underline{x^2+2x+3}$

$$
\begin{array}{r}
3x^2-4x-4 \\
x^2+2x+3\ \overline{)\ 3x^4+2x^3-3x^2\qquad\quad+1} \\
\underline{3x^4+6x^3+9x^2\qquad\qquad} \\
-4x^3-12x^2\qquad\quad+1 \\
\underline{-4x^3-8x^2-12x\qquad} \\
-4x^2+12x+1 \\
\underline{-4x^2-8x-12} \\
20x+13
\end{array}
$$

$f(x)=(3x^2-4x-4)\,g(x)\ \underline{20x+13}$

$g(\sqrt{2}i-1)=0$ より、

$f(\sqrt{2}i-1)=20(\sqrt{2}i-1)+13=\underline{-7+20\sqrt{2}i}$

(c) $f(x)=\left(\sqrt{3}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{10}{9}x+\frac{2}{27}$ と変形できるので、

$y=f(x)$ と $y=\frac{10}{9}x+\frac{2}{27}$ を連立すると、

$\left(\sqrt{3}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)^2=0$

$\sqrt{3}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{3\sqrt{3}}=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、

$f(x)=\frac{10}{9}x+\frac{2}{27}$ の解は $x=\alpha$（重解），β（重解）となる.

したがって、$y=f(x)$ と $\underline{y=\frac{10}{9}x+\frac{2}{27}}$ は2点で接しており、

接点の x 座標はそれぞれ $\alpha,\ \beta$ である.

$\underline{\alpha+\beta=-\frac{1}{3},\ \alpha\beta=-\frac{5}{9}}$

$\boxed{\text{II}}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x \geqq 0)\\[2mm] \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x<0)\end{cases}$$ は $x=0$ で微分可能.

(a) $\tan x < x < \sin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<0\right)$

$\Longleftrightarrow \tan x-\sin x < x-\sin x<0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\tan x-\sin x}{x^2} < \dfrac{x-\sin x}{x^2}<0$

$$\lim_{x\to -0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to -0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to -0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times x = 1\times\frac{1}{2}\times 0=0$$

したがって、はさみうちの原理より、$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\underline{0}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=\underline{\frac{1}{3}b}$

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3-2x}{3\cos x}=\underline{1}$$

$f(x)$ は $x=0$ で連続であるから、$\dfrac{1}{3}b=1$ より $\underline{b=3}$

$x>0$ のとき、

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+9}\left\{a\sqrt{x^2+9}-(ax+b)\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\right\}$$

$$=\frac{a(x^2+9)-x(ax+b)}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{-bx+9a}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{x\to+0} f'(x) = \frac{1}{3}a$$

$x<0$ のとき、

$$\log|f(x)| = \log\left|\frac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x}\right|$$

$$= \log|3-2x| + \log|\sin 2x| - \log 6 - \log|x| - \log|\cos x|$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-2}{3-2x} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{2}{2x-3} + \tan x + \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x\sin 2x}$$

$$= \frac{2}{2x-3} + \tan x + \frac{2x}{\sin 2x} \times \cos 2x \times \frac{2x - \tan 2x}{(2x)^2} \times 2 \quad \text{より、}$$

$$f'(x) = \left\{\frac{2}{2x-3} + \tan x + \frac{2x}{\sin 2x} \times 2\cos 2x \times \frac{2x-\tan 2x}{(2x)^2}\right\} f(x)$$

$\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ であり、

$\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to-0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{x}{\sin x} = 1$ より、

$$\lim_{x\to-0} \frac{x-\tan x}{x^2} = \lim_{x\to-0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$$

つまり、$\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{2x-\tan 2x}{(2x)^2} = 0$

これと $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = 1$ より、

$\displaystyle\lim_{x\to-0} f'(x) = -\frac{2}{3}$　　$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから、

$\frac{1}{3}a = -\frac{2}{3}$ より、$a=-2$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}} & (x \geqq 0) \\ \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x < 0) \end{cases}$

$f(0) = 1$, $f'(0) = -\dfrac{2}{3}$ であるから、

$(0, 1)$ における $y = f(x)$ の接線は、

$\underline{y = -\dfrac{2}{3}x + 1}$

$y = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}$ $(x \geqq 0)$ と $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$ は点 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ で交わる。

したがって、$\underline{u = \dfrac{3}{2}}$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

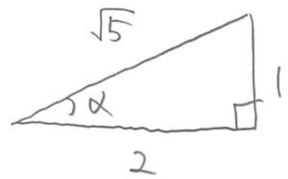
$$= -\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x\,dx + 3\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x\,dx = \left[2\sqrt{x^2+9}\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{45}{4}} - 2\sqrt{9} = 3\sqrt{5} - 6$$

$x = 3\tan\theta$ とおくと、

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_0^{\alpha} \frac{1}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}} \times \frac{3}{\cos^2\theta}\,d\theta$$



$$= \int_0^{\alpha} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}\,d\theta$$

$$= \left[\log \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\alpha}$$

$$= \log\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \log\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\begin{aligned}\tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}\\ &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = (\sqrt{5}-2)^2 \text{ より、} \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}-2\end{aligned}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-2)+1}{1-(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

以上より、

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = -(3\sqrt{5}-6) + 3\times\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 6-3\sqrt{5}+3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ⅲ

$$L\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$$

L と $z=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ の共通部分は，

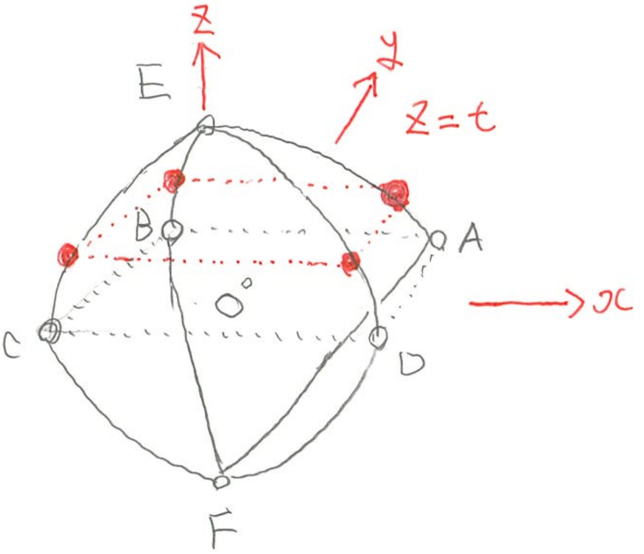
$$\begin{cases} y^2+t^2=1 \\ x^2+t^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{1-t^2} \\ x=\pm\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$ より，

4点 $(\pm\sqrt{1-t^2},\ \pm\sqrt{1-t^2},\ t)$ ※複号任意

$A(1,1)$　$B(-1,1)$　$C(-1,-1)$　$D(1,-1)$

$E(0,1)$　$F(0,-1)$

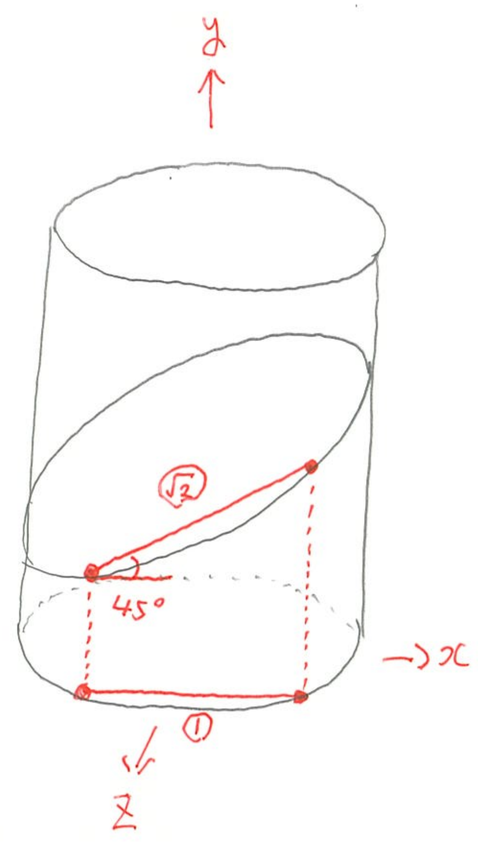
L の概形は次のようになる．



L と平面 $y=x$ の共通部分は，

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=x \end{cases}$$

これは右図のように，円柱の側面 $x^2+y^2=1$ の平面 $y=x$ における切り口を表す．

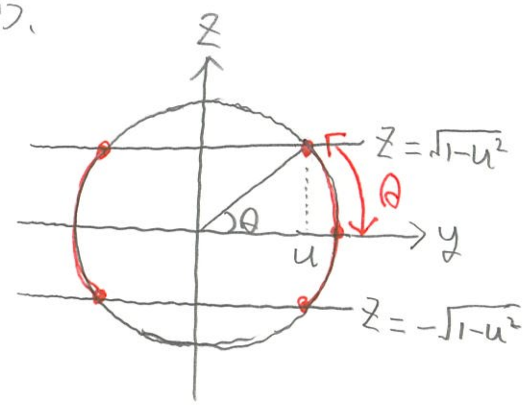


これは半径1の円を縦方向に $\sqrt{2}$ 倍拡大して得られる楕円を表し，面積は $\underline{\sqrt{2}\pi}$ である．

K … $\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1 \\ x^2+z^2 \leqq 1 \end{cases}$ から八面体を除いた立体

このうち x 軸からの距離が 1 である部分は、

$\begin{cases} y^2+z^2 = 1 \\ x^2+z^2 \leqq 1 \end{cases}$ から八面体を除いた立体であり、



$x=u$ における断面は、$(-1 \leqq u \leqq 1)$

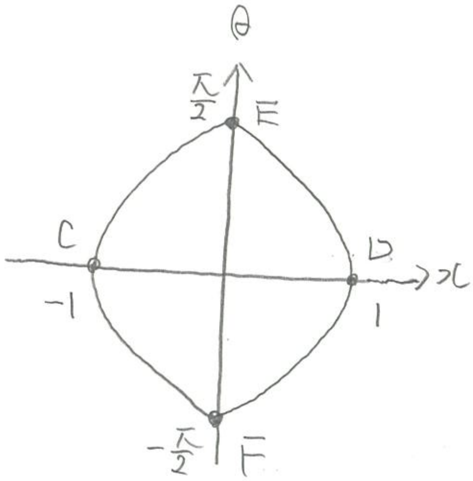
$\begin{cases} y^2+z^2 = 1 \\ u^2+z^2 \leqq 1 \quad (-\sqrt{1-u^2} \leqq z \leqq \sqrt{1-u^2}) \end{cases}$

右図のように θ をとると、$u=\cos\theta$. つまり $x=\cos\theta$

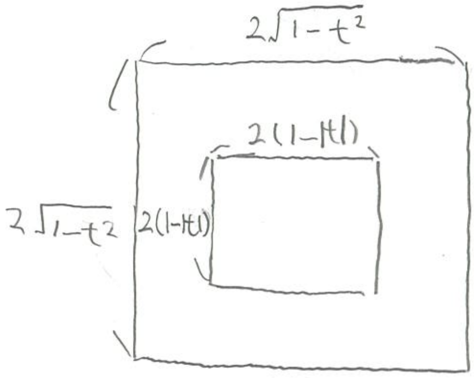
展開図は右図のようになる。

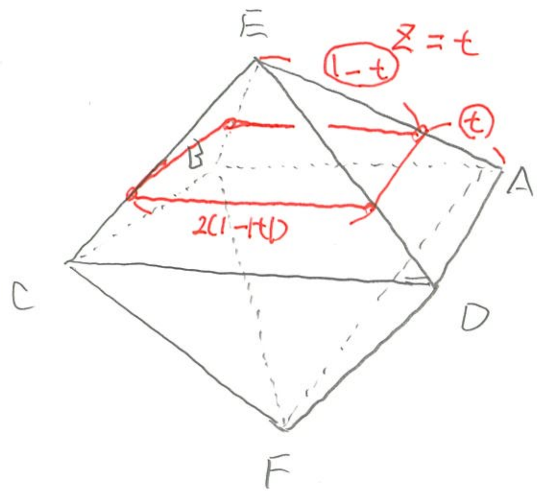
展開図の面積は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \times 8 = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \times 8 = \underline{8}$$



K の $z=t$ における断面は下図





断面積は、

$(2\sqrt{1-t^2})^2 - \{2(1-|t|)\}^2$

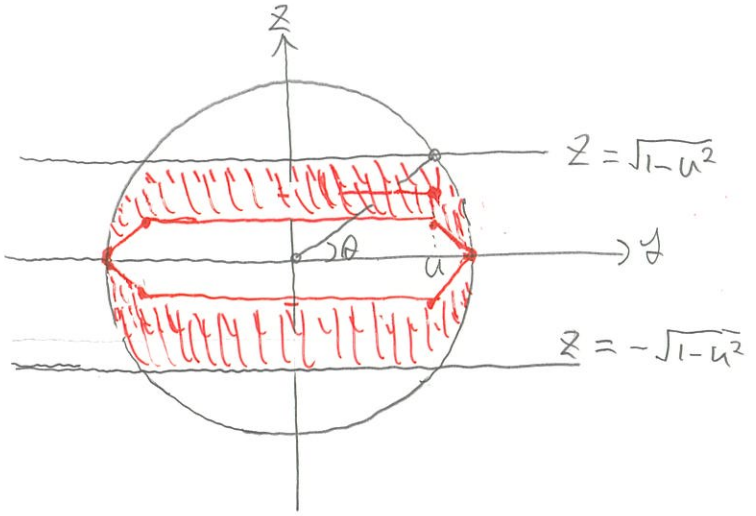
$= 4(1-t^2) - 4(t^2-2|t|+1)$

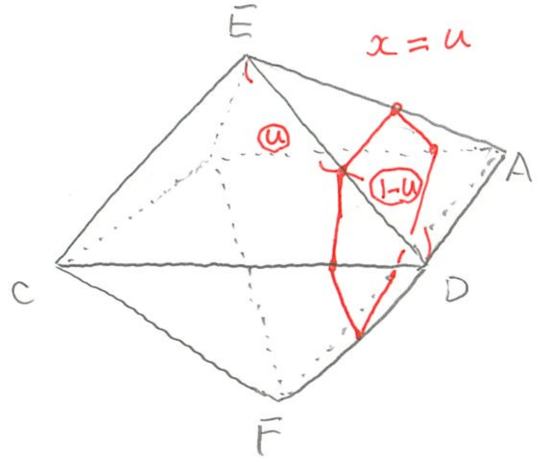
$= \underline{-8t^2+8|t| \quad (-1 \leqq t \leqq 1)}$

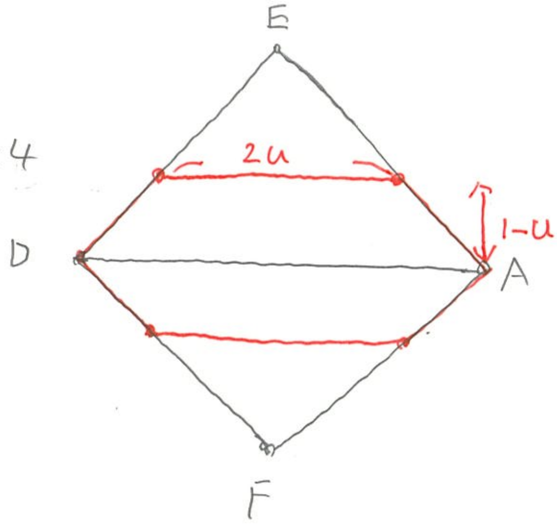
kの体積は、

$$2\int_0^1(-8t^2+8t)\,dt=-\frac{16}{3}\left[t^3\right]_0^1+8\left[t^2\right]_0^1=-\frac{16}{3}+8=\underline{\frac{8}{3}}$$

kの $x=u$ における断面は下図







$$S=\left\{\pi\times\frac{\theta}{2\pi}+\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}-\frac{1}{2}(u+1)(1-u)\right\}\times4$$

$$=2\theta+2u\sqrt{1-u^2}-2(1-u^2)$$

$(u=\cos\theta$ より、$\sqrt{1-u^2}=\sin\theta)$

$$=2\theta+2\cos\theta\sin\theta+2\cos^2\theta-2$$

$$=\underline{2\theta+\sin2\theta+\cos2\theta-1}$$

$$\frac{dS}{du}=2+2\cos2\theta-2\sin2\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

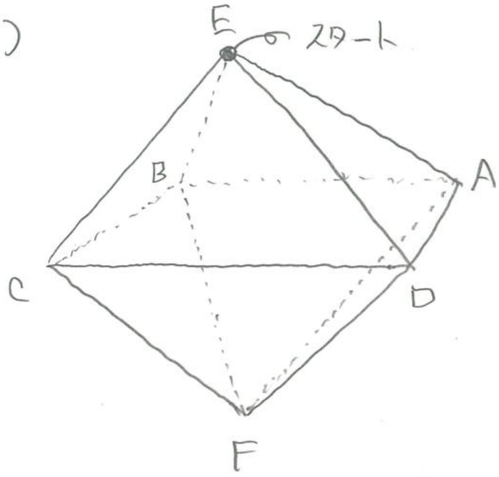
$$=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{3}{4}\pi\right)+2\quad\left(\frac{3}{4}\pi<2\theta+\frac{3}{4}\pi<\frac{7}{4}\pi\right)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{du}$	＼	+	0	−	＼
S	＼	↗		↘	＼

$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき $\left(\underline{u=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}}\right)$

$S=\underline{\frac{\pi}{2}}$（最大値）

(2)



$P(A\to E)=P(B\to E)=P(C\to E)=P(D\to A)$
$=\frac{1}{3}$

$P(A\to F)=P(B\to F)=P(C\to F)=P(D\to F)$
$=\frac{1}{6}$

$P(\text{ステイ})=\frac{1}{4}$

P(n秒後にE) $=p_n$, P(n秒後にF) $=q_n$ とする。

P(n秒後にA or B or C or D) $=1-p_n-q_n$ より、

$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n-q_n) \\ q_{n+1}=\frac{1}{6}(1-p_n-q_n) \end{cases}$$

したがって、$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_{n+1}\ (n=0,1,2,\cdots)$

$q_n=\frac{1}{2}p_n\ (n=1,2,3,\cdots)$

$$\left(\begin{array}{lll} p_0=1, & p_1=0, & p_2=\frac{1}{3} \\ q_0=0, & q_1=0, & q_2=\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n-\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}$$

$$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$p_{n+1}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{2}{9}\right)$$

$p_n=-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\ (n=1,2,3,\cdots)$ より、$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2}{9}$

$$q_n=-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{9}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$n=2$ のとき、$q_2=\frac{1}{6}$（最大）

$q_4=-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{9}=-\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{8}$　$p_4=\frac{1}{4}$ より、

P(4秒後にA) $=\left(1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$