

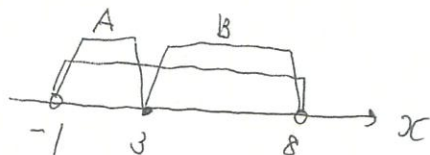
医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本大学 (医) 数学

試験日2月1日 (土)



I. (1) $A = \{x \mid -1 < x \leq 3\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 8\}$ より



$$B = \{x \mid 3 < x < 8\} \dots (\text{答})$$

(2) $f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 1$ より

$$m = -a^2 + a + 1 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

m の最大値は $\frac{5}{4}$... (答)

(3) $\log_{10} 30^{80} = 80(1 + \log_{10} 3) = 44.313$ より

30^{80} は 45 桁 ... (答)

$$\begin{aligned} (4) \frac{(\sqrt{3} + 3i)^2}{1+i} &= \frac{\{2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})\}^2}{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = \frac{12}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right) \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(5) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{7} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{15 + 14}{35 - 3 \cdot 2} = 1$$

$\tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ より

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < \alpha + \beta < \pi$

より $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$... (答)

II. 全1本の取り出し方は $12C_2 = 66$ (通り)

(1) 取り出した2個の玉の色が異なるのは、2個の玉が赤と青、青と白、白と赤のいずれかのときだから、この確率

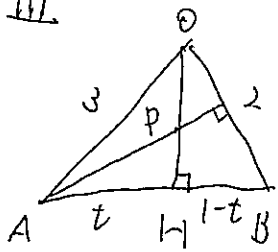
$$P(A) \text{ は } P(A) = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3}{66} = \frac{47}{66} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 取り出した2個のうち、1個が赤である事象を B とすると

$$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{66} = \frac{27}{66}$$

$$\text{求める確率は } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{27}{47} \quad \dots (\text{答})$$

III



$$(1) \vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad \text{であり}$$

$$\vec{OH} \perp \vec{AB} \quad \text{より}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\{ (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \} \cdot (-\vec{OA} + \vec{OB}) = 0$$

$$(t-1)|\vec{OA}|^2 + (1-2t)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + t|\vec{OB}|^2 = 0$$

$$9(t-1) + 3(1-2t) + 4t = 0 \quad \therefore t = \frac{6}{7} \quad \dots (\text{答})$$

(2) P は $OH \perp$ にあるから $\vec{OP} = k\vec{OH}$ (k は実数) とおける。

$$\vec{AP} \perp \vec{OB} \quad \text{より} \quad \vec{AP} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0 \quad \therefore k\vec{OH} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$$

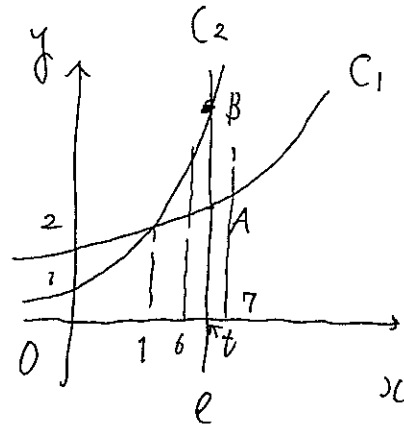
$$(1) \text{より } k\left(\frac{1}{7}\vec{OA} + \frac{6}{7}\vec{OB}\right) \cdot \vec{OB} = 3$$

$$\frac{k}{7}(\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 6|\vec{OB}|^2) = 3$$

$$k(3 + 24) = 21 \quad \therefore k = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \vec{OP} = \frac{1}{9}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} \quad \dots (\text{答})$$

Ⅳ (1) C_1, C_2 より $4^x = 2^{x+1}$
 $2^x > 0$ より $2^x = 2 \quad \therefore x = 1$



図より $t > 1$ から

$AB = 9999$
 $4^t - 2^{t+1} = 9999$

$(2^t)^2 - 2 \cdot 2^t = 99 \times 101$

$(2^t - 101)(2^t + 99) = 0$

$2^t > 0$ より $2^t = 101 \quad \dots (\text{答})$

(2) $2^6 = 64, 2^7 = 128$ より $2^6 < 101 < 2^{6+1} \quad \dots (\text{答})$

よって 格子点 (p, q) について $1 \leq p \leq 6 \quad \dots (\text{答})$

(3) $1 \leq p \leq 6$ であり, 格子点は

$p = 1$ のとき 1 個

$p = 2$ のとき $4^2 - 2^3 + 1 = 16 - 8 + 1 = 9$ 個

$p = 3$ のとき $4^3 - 2^4 + 1 = 64 - 16 + 1 = 49$ 個

$p = 4$ のとき $4^4 - 2^5 + 1 = 256 - 32 + 1 = 225$ 個

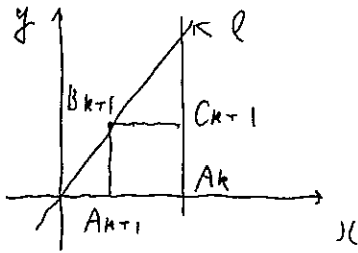
$p = 5$ のとき $4^5 - 2^6 + 1 = 1024 - 64 + 1 = 961$ 個

$p = 6$ のとき $4^6 - 2^7 + 1 = 4096 - 128 + 1 = 3969$ 個

よって, 全部で

$1 + 9 + 49 + 225 + 961 + 3969 = 5214$ 個 $\dots (\text{答})$

▽ $A_n (a_n, 0)$ とおく.



(1) 四角形 $A_k A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1}$ が正方形と

なる条件は

$$A_k A_{k+1} = A_{k+1} B_{k+1}$$

$$a_k - a_{k+1} = (\sqrt{3} - 1) a_{k+1}$$

$$a_k = \sqrt{3} a_{k+1} \quad \therefore a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} a_k \quad \dots (1)$$

$$a_0 = a \text{ より } A_1 \text{ の座標 } a_1 \text{ は } a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} a \dots (\text{答})$$

(2) ① より $a_k = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k$ なるから

$$S_k = (a_k - a_{k+1})^2 = \left\{ a_k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}^2 = a^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = C \text{ とおくと } S_k = C \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n S_k = C \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} C \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\} \text{ より}$$

$$\frac{T_7}{T_3} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{3^8 - 1}{(3^4 - 1) \cdot 3^4} = \frac{(3^4 - 1)(3^4 + 1)}{(3^4 - 1) \cdot 3^4} = \frac{3^4 + 1}{3^4} = \frac{82}{81} \dots (\text{答})$$

(3) $T_n = \frac{3}{2} a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

これから $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1$ より

$$\frac{3}{2} a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

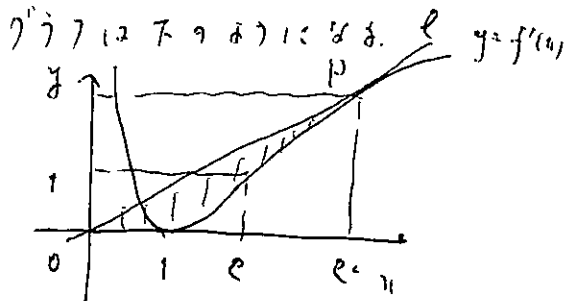
$$a > 0 \text{ より } a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{1} \dots (\text{答})$$

$$VI \quad f'(x) = \frac{2 \log x}{x}, \quad f''(x) = \frac{2(1 - \log x)}{x^2} \quad \text{より}$$

増減, 凹凸 は 下のようになる.

x	0	...	1	...	e	...	∞
$f'(x)$		-	0	+	+	-	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	4	$\nearrow$	(∞)



(1) $P(t, (\log t)^2)$ とおくと ℓ は

$$y = \frac{2 \log t}{t} (1-t) + (\log t)^2$$

これが $(0,0)$ を通るから

$$0 = -2 \log t + (\log t)^2$$

$$\log t = 0, 2 \quad \therefore t = 1, e^2$$

$$\text{また } \frac{2 \log t}{t} > 0 \quad \text{より} \quad t = e^2 \quad \therefore \ell: y = \frac{4}{e^2} x$$

$$\therefore P(e^2, 4) \dots \left(\frac{4}{e^2}\right)$$

(2) D は 上の図の斜線部分である. ℓ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} e^2 + \int_1^{e^2} (\log x)^2 dx$$

$$= 2e^2 - \left[x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) \right]_1^{e^2}$$

$$= 2e^2 - (e^2 \cdot 4 - 2(e^2 \cdot 2 - e^2) - 2)$$

$$= 2 \quad \dots \left(\frac{4}{e^2}\right)$$

$$y = (\log x)^2 \text{ より } dy = \frac{2 \log x}{x} dx \text{ だから, } D \text{ の } y \text{ 方向の厚みは}$$

図より $1/x$ の厚み V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 x^2 dy - \frac{4}{3} \pi e^4 \\ &= \pi \int_1^{e^2} x^2 \left(\frac{2 \log x}{x} \right) dx - \frac{4}{3} \pi e^4 \\ &= 2\pi \int_1^{e^2} x \log x dx - \frac{4}{3} \pi e^4 \\ &= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^{e^2} - \frac{4}{3} \pi e^4 \\ &= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} \cdot 2 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) - \frac{4}{3} \pi e^4 \\ &= \left(\frac{1}{6} e^4 + \frac{1}{2} \right) \pi \dots (25) \end{aligned}$$

<講評>

I. (1) 集合 (易) : $A, A \cup B$ と整理して, 数直線を考えてほしい.

(2) 2 次関数 (易) : 平方完成

(3) 対数 (易) : 常用対数ととも

(4) 極形式・ド・モアブルの定理 (易) : 与えられた式をまず極形式に直す.

(5) 加法定理 (標準) : $\alpha + \beta$ のとりうる範囲に注意する.

II. (1) 組合せと確率 (易) (2) 条件付き確率 (易)
よくある問題である.

III. (1) ベクトルの垂直条件 (標準) (2) 垂心の位置ベクトル (標準)
 $\vec{OH}, \vec{OP}$ と $\vec{OA}, \vec{OB}$ を用いて表し, 内積と利用する.

IV 格子点の個数 (標準)

(1) 図を描けばわかる.

(2) 誘導どおり, 見つければよい.

(3) $p=1, 2, \dots$ のなかで, 数え上げればよい. 境界を含むことに注意する.

V. 図形と極限 (標準)

(1) 図を描いて, 正方形となる条件を式で表す.

(2) (1) を一般化すれば A_k の x 座標に関する漸化式が作れる.

あとは問題文通り, S_k, T_k と丁寧に計算する.

(3) 無限等比数列の極限を用いればよい.

VI. 面積, 回転体の体積 (標準)

(1) 点 P を文字において, $(0,0)$ を通まことを用いる.

(2) 面積は普通, 体積は仔細なわりに気を使われる.

全体的に平均であり, 80~90% の出来が妥当である.