

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本医科大学 数学

試験日2月1日(土)



[I] 問1.  $P_{n,r} = {}_nC_r \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(\frac{1}{3}\right)^{n-r} = {}_nC_r \frac{2^r}{3^n} \quad \left(\frac{4}{9}\right) \leftarrow \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}$

$$\begin{aligned} Z_{n,r} &= (\sqrt{2}i)^r \cdot (1+i)^{-(n-r)} \cdot Z_0 = \left\{ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right\}^r \left\{ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{-(n-r)} \cdot 1 \\ &= (\sqrt{2})^r \left( \cos \frac{r\pi}{2} + i \sin \frac{r\pi}{2} \right) (\sqrt{2})^{-(n-r)} \left( \cos \frac{-(n-r)\pi}{4} + i \sin \frac{-(n-r)\pi}{4} \right) \\ &= (\sqrt{2})^{r-(n-r)} \left\{ \cos \left( \frac{r\pi}{2} - \frac{(n-r)\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{r\pi}{2} - \frac{(n-r)\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 2^{\frac{2r-n}{2}} \cdot \left\{ \cos \left( \frac{3r-n}{4} \pi \right) + i \sin \left( \frac{3r-n}{4} \pi \right) \right\} \quad \left(\frac{4}{9}\right) \leftarrow \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}} \end{aligned}$$

問2.  $p_r = P_{2025,r} = {}_{2025}C_r \frac{2^r}{3^{2025}} = \frac{2025!}{r!(2025-r)!} \cdot \frac{2^r}{3^{2025}}$  とおくと,

$0 \leq r \leq 2024$  のとき,

$$\begin{aligned} \frac{p_{r+1}}{p_r} &= \frac{2025!}{(r+1)!(2024-r)!} \cdot \frac{2^{r+1}}{3^{2025}} \cdot \frac{r!(2025-r)!}{2025!} \cdot \frac{3^{2025}}{2^r} \\ &= \frac{2(2025-r)}{r+1} \end{aligned}$$

よ、2.  $\frac{p_{r+1}}{p_r} > 1$  となる  $r$  の範囲は、 $\frac{2(2025-r)}{r+1} > 1$  より  $r < \frac{4049}{3}$

$\frac{4049}{3} = 1349.66\cdots$  であるから、

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1349 \text{ のとき } p_r < p_{r+1} \\ 1350 \leq r \leq 2024 \text{ のとき } p_r > p_{r+1} \end{cases} \quad \text{と変えるので、}$$

$p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{1349} < p_{1350} > p_{1351} > \cdots > p_{2024} > p_{2025}$

よ、2.  $P_{2025,r}$  は  $r = 1350$  のとき、最大値をとる。  $\left(\frac{4}{9}\right) \leftarrow \boxed{\text{ク}}$

問3.  $z_{2025, n} = 2^{\frac{2n-2025}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{3n-2025}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3n-2025}{4}\pi\right) \right\}$

$z_{2025, n} \neq 0$  は明らかなので、純虚数となる条件は

$$\frac{3n-2025}{4}\pi = \frac{(2m-1)\pi}{2} \quad (m: \text{整数})$$

これを整理して

$$3n-4m = 2023$$

ここで、 $N = 2023$  とおくと、 $3(-N) - 4(-N) = N$  より

$$3n-4m = N$$

$$- ) \quad 3(-N) - 4(-N) = N$$

$$3(n+N) - 4(m+N) = 0$$

$$\therefore 3(n+N) = 4(m+N)$$

3と4は互いに素より

$$\begin{cases} n+N = 4l \\ m+N = 3l \end{cases} \quad (l: \text{整数})$$

$$\therefore n = 4l - 2023$$

$$\therefore 0 \leq n \leq 2025 \text{ より } 0 \leq 4l - 2023 \leq 2025$$

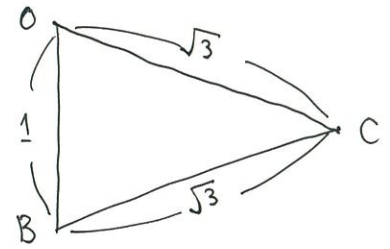
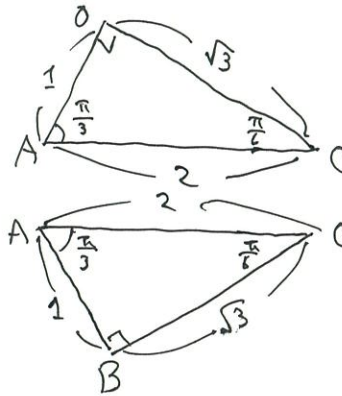
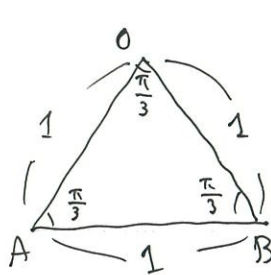
$$\therefore 2023 \leq 4l \leq 4048$$

$$\frac{2023}{4} \leq l \leq 1012$$

$$\therefore 506 \leq l \leq 1012$$

よって、求める個数は  $1012 - 506 + 1 = 507$  個 (答) ← 四

[II] 問1.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{3} \text{ より } |\vec{b} - \vec{c}|^2 = 3 \text{ とおすから } |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 3$$

$$\text{よ、こ、 } 1^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + (\sqrt{3})^2 = 3 \text{ より } \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \text{ より } \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad (\text{答})$$

問2. 点Hは平面ABC上より

$$\vec{OH} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ --- ①})$$

と置くことができて、

$$\vec{OH} \perp \vec{AB} \text{ より } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ とおすから}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2) \alpha + (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \beta + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}) \gamma$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1^2\right) \alpha + \left(1^2 - \frac{1}{2}\right) \beta + \left(\frac{1}{2} - 0\right) \gamma$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma$$

$$\text{よ、こ、 } -\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ --- ②}$$

$$\vec{OH} \perp \vec{AC} \text{ より } \vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ とおすから}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{AC} = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$= (\vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2) \alpha + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}) \beta + (|\vec{c}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{a}) \gamma$$

$$= (0 - 1^2) \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \beta + (\sqrt{3}^2 - 0) \gamma$$

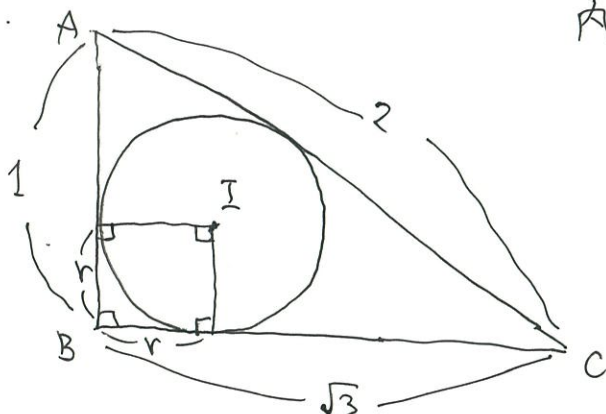
$$= -\alpha + 3\gamma$$

$$\text{よ、こ、 } -\alpha + 3\gamma = 0 \text{ --- ③}$$

$$\text{①②③より } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{6}$$

$$\text{よ、こ、 } \vec{OH} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c} \quad (\text{答})$$

問3.



内接円の半径を  $r$  とすると.

$$r = \frac{AB+BC-CA}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

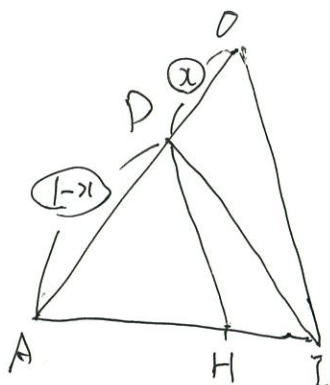
$$\begin{aligned}\vec{OI} &= \vec{OB} + \vec{BI} = \vec{OB} + \frac{r}{BA} \vec{BA} + \frac{r}{BC} \vec{BC} \\ &= \vec{b} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} (\vec{a} - \vec{b}) + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \vec{a} + \frac{3-\sqrt{3}}{3} \vec{b} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \vec{c} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

問4.  $\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

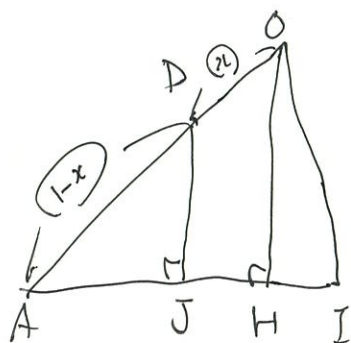
$$\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA} = \frac{\sqrt{3}-3}{2} \vec{a} + \frac{3-\sqrt{3}}{3} \vec{b} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \vec{c} = (3-\sqrt{3}) \left( -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \right)$$

∴  $\vec{AI} = (3-\sqrt{3}) \vec{AH}$  より, 3点 A, H, I は一直線上にある.

よって, 点 O, D, A, H, I は同一平面上にある.



$$\begin{aligned}|\vec{OH}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{36}|\vec{c}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{9} \cdot 1^2 + \frac{1}{36} \cdot (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{2}{3} \\ \therefore |\vec{OH}| &= \sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$



D から直線 AI に下した垂線の足を J とすると,

$$|\vec{DJ}| = (1-x) |\vec{OH}| = \sqrt{\frac{2}{3}} (1-x)$$

$$\begin{aligned}\text{また, } |\vec{AH}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{36}|\vec{c}|^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \vec{b} \cdot \vec{c} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{9} \cdot 1^2 + \frac{1}{36} (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{3} \\ \therefore |\vec{AH}| &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



$$\therefore \vec{AI} = (3 - \sqrt{3}) |\vec{AH}| = (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore \vec{HI} = |\vec{AI}| - |\vec{AH}| = (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

以上より、 $\triangle AHI$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{HI}| \cdot |\vec{AJ}| = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - \lambda)$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{2}}{24} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$1 - \lambda = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3} - 3}$$

$$\lambda = 1 - \frac{1}{4(2 - \sqrt{3})}$$

$$\lambda = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4(4 - 3)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \quad \left( \frac{4}{6} \right)$$

[Ⅳ] 問1.  $p, q$  を実数として,  $\vec{OP} = (2p^2, p, 0)$ ,  $\vec{OQ} = (2q^2, 0, q)$  とおくことができて,

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ} = (2(p^2+q^2), p, q) \text{ となり, } R(x, y, z) \text{ とすると,}$$

$$\begin{cases} x = 2(p^2+q^2) \\ y = p \\ z = q \end{cases}$$

となり, 動点  $R$  の集合  $S$  が満たす方程式は,

$$S: x = 2(y^2+z^2) \quad \text{すなわち} \quad S: y^2+z^2 = \frac{x}{2} \quad \text{--- ①}$$

よって平面  $x = R$  の共通部分は,  $\begin{cases} x = R \\ y^2+z^2 = \frac{R}{2} \end{cases}$  となるので, 平面  $x = R$  内の

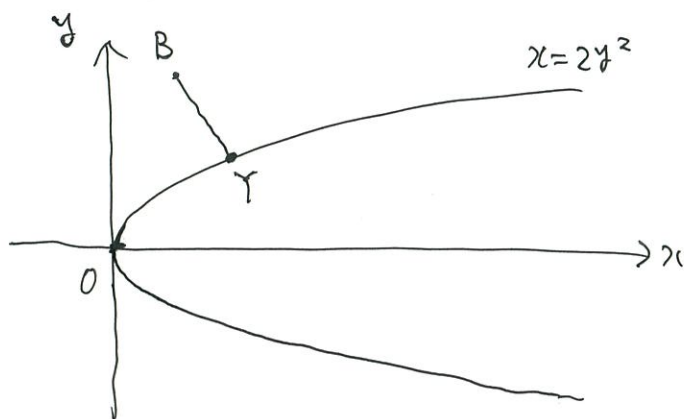
点  $(R, 0, 0)$  を中心とし, 半径  $\sqrt{\frac{R}{2}}$  の円となる. (答)

問2.  $H(1, 0, 0)$  より  $AH = \sqrt{(1-1)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$  (答)

問3.  $HB = HA = 5$  より  $B(1, 5, 0)$  (答)

問4. 図形  $S$  は,  $x$  軸を中心とした回転体である ( $\because$  軌道が  $x$  軸上の点を中心とした円より). よって,  $|\vec{AX}|$  の最小値を求めるには, 集合  $S$  上で点  $Y$  を動かすとき  $|\vec{BY}|$  の最小値を求めればよい.

さらに, 集合  $S$  は, 回転軸を中心には外側に凸な図形であるから,  $|\vec{BY}|$  が最小になるのは点  $Y$  が  $x$  軸平面上にあるときである.



よって,  $Y(2p^2, p, 0)$  とおくと,

$$\begin{aligned} |\vec{BY}| &= \sqrt{(2p^2-1)^2 + (p-5)^2} \\ &= \sqrt{4p^4 - 3p^2 - 10p + 26} \end{aligned}$$

よって,

$$f(p) = 4p^4 - 3p^2 - 10p + 26$$

とおく.

$$f'(p) = 16p^3 - 6p - 10 = 2(p-1)(8p^2+8p+5)$$

|         |            |    |            |
|---------|------------|----|------------|
| $p$     | ---        | 1  | ---        |
| $f'(p)$ | -          | 0  | +          |
| $f(p)$  | $\searrow$ | 17 | $\nearrow$ |

$$\left( \begin{array}{l} 8p^2+8p+5=0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると} \\ D/4 = -24 < 0 \text{ より} \\ \text{常に } 8p^2+8p+5 > 0 \end{array} \right)$$

よって  $f(p)$  は  $p=1$  のとき最小となり, 最小値は 17 である.

したがって、 $|\vec{BY}|$  は  $Y(2, 1, 0)$  のとき最小値  $\sqrt{17}$  をとる。

ゆえに、 $|\vec{AX}|$  の最小値は  $\sqrt{17}$  (答)

また、 $A(1, 3, 4)$  を  $x$  軸のまわりに回転して  $B(1, 5, 0)$  に移したので、

$|\vec{AX}|$  の最小値をよめる点  $X(2, u, v)$  は同じ回転で  $Y(2, 1, 0)$  に移ることになるので、複素数平面で考える。

$$\begin{cases} (3+4i)(\cos\theta+i\sin\theta) = 5 \\ (u+vi)(\cos\theta+i\sin\theta) = 1 \end{cases}$$

よって、 $u+vi = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  となるので、最小値をよめる  $X$  の座標は

$$X\left(2, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad (\text{答})$$

$$[IV] \text{ 問 1. } b(-x) = \frac{1}{2} \{a(-x) + a(x)\} = \frac{1}{2} \{a(x) + a(-x)\} = b(x)$$

∴  $b(-x) = b(x)$  より  $b(x)$  は偶関数である。 (証明終)

$$c(-x) = \frac{1}{2} \{a(-x) - a(x)\} = -\frac{1}{2} \{a(x) - a(-x)\} = -c(x)$$

∴  $c(-x) = -c(x)$  より  $c(x)$  は奇関数である。 (証明終)

問 2. (1)  $g(x)f(x)$  の原始関数の 1 つを  $U(x)$  とおく。

すなわち、 $U'(x) = g(x)f(x)$  とする。

このとき、(ii) より

$$f(x+h) + [U(x)]_x^{x+h} = f(x)$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = -\{U(x+h) - U(x)\}$$

両辺を  $h (\neq 0)$  で割り、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{U(x+h) - U(x)}{h}$$

ここで、 $h \rightarrow 0$  の極限をとると、 $U(x)$  は微分可能より、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\frac{U(x+h) - U(x)}{h} \right\} = -U'(x) = -g(x)f(x)$$

∴  $f(x)$  は微分可能であり、 $f'(x) = -g(x)f(x)$  (答)

$$(2) G(x) = \int g(x) dx = \int \left( \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{3+\cos x} \right) dx$$

$$= \int \left( \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} + \frac{-(3+\cos x)'}{3+\cos x} \right) dx$$

$$= \log(1+e^x) - \log(3+\cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$= \log \left( \frac{1+e^x}{3+\cos x} \right) + C$$

$$\therefore G(0) = \log \frac{2}{4} + C \text{ より } G(0) = 0 \text{ とすると } C = \log 2$$

$$\therefore G(x) = \log \left\{ \frac{2(1+e^x)}{3+\cos x} \right\} \quad (\text{答})$$



$$(3) \quad h'(x) = \{e^{G(x)} f(x)\}' = e^{G(x)} \cdot G'(x) \cdot f(x) + e^{G(x)} \cdot f'(x)$$

$$\because \therefore G'(x) = g(x), \quad f'(x) = -g(x)f(x) \quad \therefore$$

$$h'(x) = e^{G(x)} \cdot g(x) \cdot f(x) + e^{G(x)} \{-g(x)f(x)\} = 0$$

$$\therefore \therefore h'(x) = 0 \quad \therefore \quad h(x) = A \quad (\text{定数})$$

$$e^{G(x)} = \frac{2(1+e^x)}{3+\cos x} \quad \therefore \text{おきかえ} \quad \frac{2(1+e^x)}{3+\cos x} \cdot f(x) = A$$

$$x=0 \text{ とおす } \therefore \quad \frac{2 \cdot 2}{4} \cdot f(0) = A$$

$$(i) \therefore f(0) = 2 \quad \therefore \quad A = 2$$

$$\therefore \therefore f(x) = \frac{3+\cos x}{1+e^x} \quad (\text{答})$$

$$\text{問} 3. \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3+\cos x}{1+e^x} dx \quad \left( \begin{array}{l} x = -t \quad \therefore \text{おきかえ} \quad dx = -dt \\ x | \begin{array}{l} -\pi \rightarrow \pi \\ t | \pi \rightarrow -\pi \end{array} \end{array} \right)$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{3+\cos(-t)}{1+e^{-t}} (-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t(3+\cos t)}{e^t+1} dt$$

$$\therefore \therefore I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x(3+\cos x)}{1+e^x} dx \quad \text{が成立するの?}$$

$$2I = I + I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3+\cos x}{1+e^x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x(3+\cos x)}{1+e^x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)(3+\cos x)}{1+e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} (3+\cos x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} (3+\cos x) dx \quad (\because 3+\cos x \text{ は偶関数})$$

$$\therefore \therefore I = \int_0^{\pi} (3+\cos x) dx = [3x + \sin x]_0^{\pi} = 3\pi \quad (\text{答})$$