

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

順天堂大学 (医) 数学

試験日 2月3日 (月)



$$\text{I} (1) \quad a_n < 1 \text{ より } 2^{n+3} 3^{-n} < 1 \quad \therefore 2^{n+3} < 3^n$$

$$\text{両辺の常用対数をとって } (n+3) \log_{10} 2 < n \log_{10} 3$$

$$\text{より } n > \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = 5.1 \dots$$

$$\text{これをみたす最小の } n \text{ は } n = \underline{6} \dots (\text{答})$$

$$a_n = 8 \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ より } \{a_n\} \text{ は 初項 } 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}, \text{ 公比 } \frac{2}{3} \text{ の 等比数列 である}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は 収束し } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{16}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \underline{16} \dots (\text{答})$$

$$b_n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 8 \left(\frac{2}{3}\right) \times 8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \dots \times 8 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 8^n \left(\frac{2}{3}\right)^{1+2+\dots+n} = 2^{3n} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2^{3n+\frac{1}{2}n(n+1)}}{3^{\frac{1}{2}n(n+1)}}$$

$$\text{これから } b_n < 1 \text{ より } 2^{\frac{1}{2}n(n+7)} < 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$\text{両辺の常用対数をとって } n(n+7) \log_{10} 2 < n(n+1) \log_{10} 3$$

$$n > 0 \text{ より } (n+7) \log_{10} 2 < (n+1) \log_{10} 3 \quad \therefore n > \frac{7 \log_{10} 2 - \log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = 9.2 \dots$$

$$\text{これをみたす最小の } n \text{ は } n = \underline{10} \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \vec{OR} = \frac{1}{3} \vec{OP} + \frac{2}{3} \vec{OA}, \quad \vec{OD} = \frac{2}{3} \vec{OB} \text{ より}$$

$$\vec{DR} = \vec{OR} - \vec{OD} = \frac{1}{3} s \vec{OA} + \frac{2}{3} \{(1-t) \vec{OB} + t \vec{OC}\} - \frac{2}{3} \vec{OB}$$

$$= \frac{1}{3} s \vec{OA} - \frac{2}{3} t \vec{OB} + \frac{2}{3} t \vec{OC} = s \left(\frac{1}{3} \vec{OA}\right) + t \left(\frac{2}{3} \vec{OC} - \frac{2}{3} \vec{OB}\right)$$

$$\vec{DR} = s \vec{k} + t \vec{l} \text{ より } \vec{k} = \frac{1}{3} \vec{OA}, \quad \vec{l} = \frac{2}{3} \vec{OC} - \frac{2}{3} \vec{OB} \dots (\text{答})$$

$$|\vec{k}|^2 = \frac{1}{9} |\vec{OA}|^2 = \frac{1}{9} \cdot 9^2 = 9 \dots (\text{答}), \quad |\vec{l}|^2 = \frac{4}{9} (|\vec{OC}|^2 - 2 \vec{OB} \cdot \vec{OC} + |\vec{OB}|^2) = 12 \dots (\text{答})$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 27, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{27}{2} \text{ より } \vec{k} \cdot \vec{l} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = \frac{2}{9} \left(27 - \frac{27}{2}\right) = 3 \dots (\text{答})$$

$$0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ より 点 } R \text{ が 図 } \pi \text{ の } \vec{k}, \vec{l} \text{ (} \vec{k}, \vec{l} \text{ は 平行四辺形の基底) である,}$$

$$\therefore \text{面積は } \sqrt{|\vec{k}|^2 |\vec{l}|^2 - (\vec{k} \cdot \vec{l})^2} = \sqrt{9 \cdot 12 - 3^2} = \underline{3\sqrt{11}} \dots (\text{答})$$

(3) $P(y+b)$ の y^3 の係数は $P(x)$ の x^4 の係数から出てくるから $(y+b)^4$ の y^3 の係数 $4C$ 、 $y^3 \cdot b = 4by^3$ より $-4y^3$ と一致するから、 $b = -1 \dots (\frac{1}{2})$

$P(ax+b)$ の z^4 , z^3 の係数は、 $P(y+b)$ の y^4 , y^3 の係数から出てくるから

$$y^4 - 4y^3 = (ax)^4 - 4(ax)^3 = a^4 z^4 - 4a^3 z^3 \text{ より } (z^4 - C z^3) \text{ と一致し、}$$

$$a^4 = C, \quad 4a^3 = C \text{ より } C \text{ を消去して } a^4 = 4a^3. \quad a \neq 0 \text{ より } a = 4 \dots (\frac{1}{2})$$

$$\text{このとき } C = a^4 = 4^4 = 2^8 = 256 \dots (\frac{1}{2})$$

また、 $P(y+b)$ の y^2 の係数から $P(ax+b)$ の z^2 の係数が出てくるから、

$$-48(ax)^2 = -48 \cdot 4^2 z^2 = -2^8 \cdot 3 z^2 = -768 z^2 \text{ より } d = -768 \dots (\frac{1}{2})$$

$P(ax+b) = 0$ の両辺を $z^2 (\neq 0)$ で割ると、

$$(z^2 - C) + d + \frac{C}{z} + \frac{C}{z^2} = 0$$

$$z^2 - z - 3 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$(z - \frac{1}{z})^2 - (z - \frac{1}{z}) - 1 = 0 \quad \therefore t^2 - t - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \dots (\frac{1}{2})$$

$x = ax + b = 4z - 1$ より z が複素数のとき x が複素数となる。

$$z - \frac{1}{z} = t \text{ より } z^2 - tz - 1 = 0 \quad \therefore z = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

$t^2 - t - 1 = 0$ より $t^2 = t + 1$ より $t^2 + 4 = t + 5$ を用いて z が複素数のときは、

$$\text{すべて } + \text{ とし、このとき } z = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{11 + \sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$x = 4z - 1 = 1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{\frac{11 + \sqrt{5}}{2}} - 1 = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \dots (\frac{1}{2})$$

(4) (ア) $x \leq -2$ のとき $0 < -x - 2 + x + 1 < 3 \quad \therefore 0 < -1 < 3$ より不適。

(イ) $-2 \leq x \leq 1$ のとき $0 < 2x + 1 < 3 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < 1$

(ウ) $1 \leq x$ のとき $0 < 3 < 3$ より不適。

$$\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\} \subset \{x \mid -1 < x < 1\} \text{ より } \underline{(C)} \dots (\frac{1}{2})$$

(b) $a = 2, b = \frac{1}{2}$ のとき $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ とあり、 a, b : 有理数 $\nRightarrow x$: 有理数

x が有理数のとき x^4 は $\mathbb{Q}$ 、 $a = x, b = 1$ とできるから、 a, b : 有理数 $\Leftarrow x$: 有理数

より $\underline{(B)} \dots (\frac{1}{2})$

(c) $\underline{(C)} \dots (\frac{1}{2})$

(d) a が整数のとき、 a と a^4 の偶奇は一致するから $\underline{(A)} \dots (\frac{1}{2})$

Ⅱ (a) $f(x) = 6x$ は $x = -2, 4, 1$ と $f(x)$ に接する。

$$f(x) - 6x = a(x+2)(x-1)(x-4) \quad \dots (答)$$

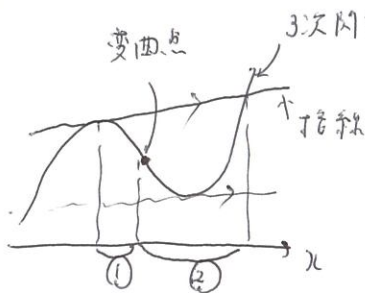
$$f(x) = a(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) + 6x \text{ より}$$

$$f'(x) = a(3x^2 - 6x - 6) + 6$$

$$f'(-2) = -3 \text{ より } a(3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 - 6) + 6 = -3 \quad \therefore a = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \quad \dots (答)$$

$$b = -3a = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad \dots (答), \quad c = -6a + 6 = \underline{\underline{9}} \quad \dots (答), \quad d = 8a + 4 = \underline{\underline{-4}} \quad \dots (答)$$

(b)



3次関数 条件(i) より $f(x) = a(x-1)^2(x-4)$

$$\therefore f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) + 6x \quad \dots (1)$$

$y = 6x$ と $y = 6x - 12$ は平行だから $y = f(x)$ の変曲点

は $x=2$ として対称。条件(ii) より $f(x)$ の変曲点の x 座標

は $x=2$ のときで、条件(i) より $y = 6x - 12$ と $y = f(x)$

は $x=3$ で接し、 $x=0$ で交わる。

$$f(x) - (6x - 12) = a(x-3)^2 \cdot x$$

$$f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x) + 6(-12) \quad \dots (2)$$

①・② の一対を比較し、定数項を比較して $-4a = -12 \quad \therefore a = \underline{\underline{3}} \quad \dots (答)$

$$b = -6a = \underline{\underline{-18}} \quad \dots (答), \quad c = 9a + 6 = \underline{\underline{33}} \quad \dots (答), \quad d = \underline{\underline{-12}} \quad \dots (答)$$

(c) (1, 6) は $y = f(x)$ の変曲点であり、 $f(x) - 6x = a(x-1)^3$

$$f(x) = a(x-1)^3 + 6x \quad \therefore f'(x) = 3a(x-1)^2 + 6$$

$$x = -3 \text{ で極値をとるから } f'(-3) = 0 \quad \therefore a = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}} \quad \dots (答)$$

$$f(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 6x \text{ より}$$

$$b = \underline{\underline{\frac{3}{8}}} \quad \dots (答), \quad c = \underline{\underline{-\frac{3}{8}}} + 6 = \underline{\underline{\frac{45}{8}}} \quad \dots (答), \quad d = \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \quad \dots (答)$$

$$\text{III} (1) I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \log 2 \quad \dots \text{(*)}$$

$$(2) I_{k+1} + I_k = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{2k+3} x + \tan^{2k+1} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+1} x (\tan^2 x + 1) dx \\ = \left[\frac{1}{2k+2} \tan^{2k+2} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2k+2} \quad \dots \text{①}$$

$$I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right) \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①} \text{ で } k=0 \text{ とおくと } I_1 + I_0 = \frac{1}{2} \quad \therefore I_1 = -I_0 + \frac{1}{2}$$

$$n=1 \text{ のとき } I_1 = (-1)^1 \left(I_0 + \frac{1}{2} \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1} \right) \text{ より ② は成り立つ.}$$

$n=k$ のとき ② が成り立つと仮定すると, ① より

$$I_{k+1} = -I_k + \frac{1}{2k+2} = -(-1)^k \left(I_0 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m} \right) + \frac{1}{2k+2} \\ = (-1)^{k+1} \left(I_0 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m} \right) + \frac{(-1)^{2k+2}}{2(k+1)} = (-1)^{k+1} \left(I_0 + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^m}{2m} + \frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)} \right) \\ = (-1)^{k+1} \left(I_0 + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{(-1)^m}{2m} \right) \text{ より ② は成り立つ.}$$

以上 より ② は成り立つ. ■

$$(3) 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき } 0 \leq \tan^{2n+1} x \leq \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1}$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\tan^{2n+1} x}_{I_n} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1} dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1} dx = \left[\left(\frac{4}{\pi} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2n+2} \quad \text{ただし}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi} x \right)^{2n+1} dx = 0 \quad \text{だから, } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

$$(2) \text{ の ② より } \frac{I_n}{(-1)^n} = I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \quad \text{だから } n \rightarrow \infty \text{ とおくと}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{2m} \right) = 0 \quad \therefore I_0 = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m}$$

$$(1) \text{ より } -\frac{1}{2} \log 2 = - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$$

$$\text{よって } \log 2 = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \quad \blacksquare$$

< 講評 >

I (1) 数列, 無限級数 (標準)

誘導とくり返ればよい

(2) 空間ベクトル (標準)

空間にある平面のベクトル方程式, $\overrightarrow{DR} = s\overrightarrow{d} + t\overrightarrow{e}$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ と与えられた点の存在範囲が平行四辺形であることがわかれば解ける。

(3) 4次方程式, 相反方程式の応用 (標準)

すべてを展開したら大変だから, 必要な項がどこかを考える。

(4) 必要条件・十分条件 (標準, (c)は易)

(a)は数直線を利用, (b)は落着いて考えればわかる。

(c)は m, n, l の偶奇の個数の組み合わせを考える必要はない。

II 3次関数の性質 (標準)

(1)を利用して (2), (3)も同様に考えればよい。

3次関数の接線と変曲点の位置関係, 変曲点にある接線だけが接点以外に交点をもたないことを知っていれば機械的に解ける。

III 定積分と漸化式, 数学的帰納法, 定積分と級数 (標準)

(1)は易。 (2)は I_n に関する漸化式が重要であることに気づけば, 丁寧に式変形すればよい。 (3)は無限級数に関する比較的よくある証明で, 経験があれば迷うことはない。

とくに難しい考え方を使うようなものはなく, どちらかというと言算量が多いので, 手早く進められるかにかかっている。
時間的余裕がないので, 65%~70% 程度とればよいと思われる。