

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

埼玉医科大学 数学

試験日2月4日(火)



1 問1. $f'(x) = e^x - 3e^{-x} = \frac{e^{2x} - 3}{e^x}$

x	---	$\frac{1}{2}\log 3$	---
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}\log 3$ (答) のとき
最小値 $2\sqrt{3}$ (答) をとる。

$$\left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\log 3 \text{ のとき } e^x = \sqrt{3} \text{ より} \\ f\left(\frac{1}{2}\log 3\right) = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{array} \right)$$

問2. 求める点を表す複素数を z とすると。

$$z - \beta = (\alpha - \beta)\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right) \text{ より}$$

$$z = \{(2+i) - (1-2i)\}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 1-2i$$

$$= (1+3i) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1-2i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+4i) + 1-2i$$

$$= \sqrt{2}(-1+2i) + 1-2i$$

$$= (\sqrt{2}-1)(-1+2i) \quad \left(\frac{3}{2}\right)$$

[2] 点Pの速さを v とおく。時刻 t までは点Pが動いた距離は vt である。

問1. $P(10-vt, 0)$, $Q(0, 20-vt)$ より

$$PQ = \sqrt{(10-vt)^2 + (20-vt)^2} = \sqrt{2(vt)^2 - 60vt + 500}$$

$$= \sqrt{2(vt-15)^2 + 50}$$

よ、2. PQ は、 $vt=15$ すなわち点Pが 15m (答) 動いたときに、
最小値 $5\sqrt{2}$ (答) をとる。

問2. $P(10-vt, 0)$, $Q(0, 20-3vt)$ より

$$PQ = \sqrt{(10-vt)^2 + (20-3vt)^2} = \sqrt{10(vt)^2 - 140vt + 500}$$

$$= \sqrt{10(vt-7)^2 + 10}$$

よ、7. PQ は、 $vt=7$ すなわち点Pが 7m (答) 動いたときに、
最小値 $\sqrt{10}$ (答) をとる。

問3. $P(10-vt, 0)$, $Q(0, 20-kvt)$ より

$$PQ = \sqrt{(10-vt)^2 + (20-kvt)^2} = \sqrt{(k^2+1)(vt)^2 - (40k+20)vt + 500}$$

$$= \sqrt{(k^2+1) \left\{ vt - \frac{10(2k+1)}{k^2+1} \right\}^2 - \frac{100(2k+1)^2}{k^2+1} + 500}$$

よ、2. PQ が最小になるときに点Pが動いた距離 d は、

$$d = \frac{10(2k+1)}{k^2+1} \text{ m (答)}$$

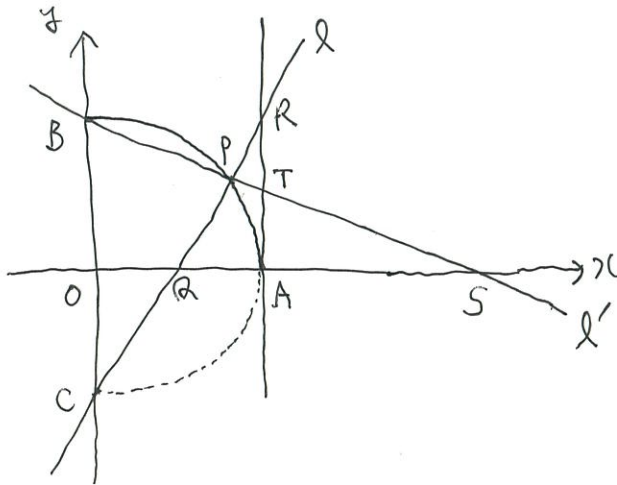
$$f(k) = \frac{10(2k+1)}{k^2+1} \text{ とおいて, } f'(k) = \frac{10\{2(k^2+1) - (2k+1) \cdot 2k\}}{(k^2+1)^2} = \frac{-20(k^2+k-1)}{(k^2+1)^2}$$

k	(0)	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(k)$		+	0	-
$f(k)$		$\nearrow$		$\searrow$

よ、7. $d = f(k)$ が最大となるときの k の値は、

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (答)}$$

3



問1. 点Pは線分BCを直径とする

円周上にあるので、 $\angle BPC = \frac{\pi}{2}$

よって、 l と l' は直交するので、

l' の傾きを m とすると、垂直条件より

$$t \times m = -1 \quad \therefore m = -\frac{1}{t} \quad (\text{答})$$

$$\text{よって、} l: y = tx - 1, \quad l': y = -\frac{1}{t}x + 1$$

問2. 点Pは l と l' の交点より、 $tx - 1 = -\frac{1}{t}x + 1$ を解いて $x = \frac{2t}{t^2+1}$

$$y = t \times \frac{2t}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{よって } P\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

ここで、直線 l は、直線CAと直線CBの間を通ることから、その傾きは $t > 1$ を満たす。

よって、点Pのy座標は $\frac{t^2-1}{t^2+1} > 0$ を満たし、確かに円弧AB上にある。

l とx軸の交点は $tx - 1 = 0$ より $x = \frac{1}{t}$ であるから $Q\left(\frac{1}{t}, 0\right)$

l' とx軸の交点は $-\frac{1}{t}x + 1 = 0$ より $x = t$ であるから $S(t, 0)$

$$\text{このとき } \triangle PBC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot (P\text{の}x\text{座標}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2t}{t^2+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\triangle PQS = \frac{1}{2} \cdot QS \cdot (P\text{の}y\text{座標}) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{(t^2-1)^2}{2t(t^2+1)}$$

$$\therefore \frac{\triangle PBC}{\triangle PQS} = 3 \text{ より、} \frac{2t}{t^2+1} \times \frac{2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2} = 3 \text{ となり、これを整理して}$$

$$3t^4 - 10t^2 + 3 = 0 \text{ すなわち } (3t^2 - 1)(t^2 - 3) = 0$$

$$\text{よって、} t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{3} \text{ であるが、} t > 1 \text{ より } t = \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

直線 l' とx軸の正の側の交角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)とすると、 $t = \sqrt{3}$ のとき

$$l'\text{の傾きは} -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より } \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{よって } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{よって、} \angle AST = \frac{\pi}{6} \text{ であるから、} \angle ATP = \frac{2}{3}\pi \quad (\text{答})$$

問3. $t = \sqrt{3}$ のとき $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $T\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$ となるので、

$$\begin{aligned} PT &= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

4. 問1. ア×玉を○で表すとして、10個の○にしきり線4本を入れて

5つに分ければよいので、

○○○○○○○○○○ | | | | の並べ方
10個 4本

$$\frac{14!}{10! 4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001 \text{ 通り } (\frac{14}{4})$$

問2. Aにn個分画した後、残りの10-n個をB, C, D, Eの4人に分画すればよいので、10-n個の○にしきり線3本を入れて4つに分ければよいので、

○○ ---- ○ | | | の並べ方
10-n個 3本

$$\frac{(13-n)!}{(10-n)! 3!} = \frac{(13-n)(12-n)(11-n)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (10-n+1)(10-n+2)(10-n+3) \text{ 通り } (\frac{13}{3})$$