

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

東京医科大学 数学

試験日2月5日(水)



第1問 (1) 与式 $= \frac{2\cos 30^\circ \cos 5^\circ}{\sqrt{2}\sin(40^\circ+45^\circ)} = \frac{\sqrt{3}\cos 5^\circ}{\sqrt{2}\sin 95^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 5^\circ}{\sqrt{2}\cos 5^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2} \dots (\frac{1}{2})$

(2) $y = 3x^2 - 4x - 5 \dots (1)$ $y = -2x^2 + 15x + 7 \dots (2)$

x^2 の項を消去する為に $(1) \times 2 + (2) \times 3$ より

$5y = 37x + 11 \quad \therefore y = \frac{37}{5}x + \frac{11}{5} \dots (\frac{2}{5})$

(3) 与式 $= \int_0^4 x \sqrt{(x-1)^2} dx = \int_0^4 x |x-1| dx$
 $= \int_0^1 x(1-x) dx + \int_1^4 x(x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^4$
 $= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2}\right) = \frac{41}{3} \dots (\frac{3}{3})$

(4) $\omega^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ より ω は $x^5 = 1$ の解であり.

$x^5 = 1$ のすべての解は $x = 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ の5個であり

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ であることから

$(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4) = x^5 - 1$

$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

これは x の恒等式だから $x=2$ と代入して

$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4) = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 31 \dots (\frac{4}{3})$

第2問

(1) A の要素 1 は部分集合に入るか入らないかで 2 通りあり、他の要素も同様であり、8 個の要素があなから、 A の部分集合は全部で $2^8 = 256$ (個) ... (答)

(2) 2 項定理より $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k a^{n-k} b^k$ が成り立つ。

C の要素の個数が k ($k=0, 1, 2, \dots, 8$) 個の集合は 8C_k 個あり、 C の部分集合が B だから、集合 B は 2^k 個できる。よって $B \subset C$ となる B と C の選び方は

$$\sum_{k=0}^8 {}^8C_k 2^k = (1+2)^8 = 3^8 = 81 \cdot 81 = 6561 \text{ (個)} \dots (\text{答})$$

(3) (2) と同様に、 C の要素の個数が k ($k=0, 1, 2, \dots, 8$) 個のものも 8C_k 個あり。このとき、集合 B の要素は、 C に含まれない $8-k$ 個の中から選ばれるから全部で

$$\sum_{l=0}^{8-k} {}^{8-k}C_l = (1+1)^{8-k} = 2^{8-k} \text{ 個}$$

できる。よって $B \cap C$ が空集合となるような B と C の選び方は全部で

$$\sum_{k=0}^8 {}^8C_k \cdot 2^{8-k} = (2+1)^8 = 6561 \text{ (個)} \dots (\text{答})$$

第3問

$$(1) \log_{10} 5^{50} = 50 (1 - \log_{10} 2) = 50 \times 0.6990 \\ = 34.95 \text{ 以下} \quad f(5^{50}) = 35 \dots (\text{答})$$

(2) $f(n^2)$ は n の増加数列で

$$1^2 = 1, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 9^2 = 81, 10^2 = 100, 31^2 = 961,$$

$$32^2 = 1024, 99^2 = 9801, 100^2 = 10000$$

これから

$$\sum_{n=1}^{100} f(n^2) = 1 \times (3-0) + 2(9-3) + 3(31-9) + 4(99-31) + 5 \\ = 3 + 12 + 66 + 272 + 5 = 358 \dots (\text{答})$$

$$(3) f(2^n) = 100 \text{ 以下}$$

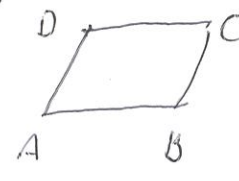
$$99 \leq \log_{10} 2^n < 100$$

$$\frac{99}{\log_{10} 2} \leq n < \frac{100}{\log_{10} 2}$$

$$328.9\dots \leq n < 332.2\dots$$

$$\text{これから } n = 329, 330, 331, 332 \text{ の } 4 \text{ 個} \dots (\text{答})$$

第 4 問

(1)  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ より
 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 よって $C(2, 2, 2)$... (答)

直線 AB のベクトル方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

平面 $z=t$ の交点 P_t は $z=t$ より $k = \frac{t}{2}$ のときだから、

$$P_t \left(1 + \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t \right) \dots (\text{答})$$

(2) 直線 AB, DC と平面 $z=t$ の交点それぞれ P_t, Q_t とする (1) より $P_t \left(1 + \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t \right)$

直線 DC のベクトル方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OD} + \ell \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから 平面 $z=t$ の交点 Q_t は $z=t$ より $\ell = \frac{t}{2}$ のときだから

$$Q_t \left(3 - \frac{t}{2}, 1 + \frac{t}{2}, t \right)$$

$R_t(0, 0, t)$ とおき、この面の上から見ると、

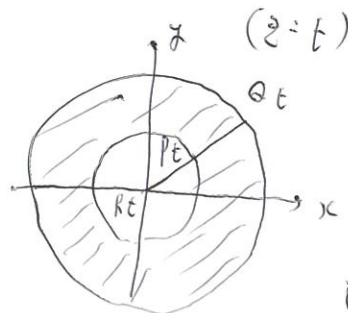
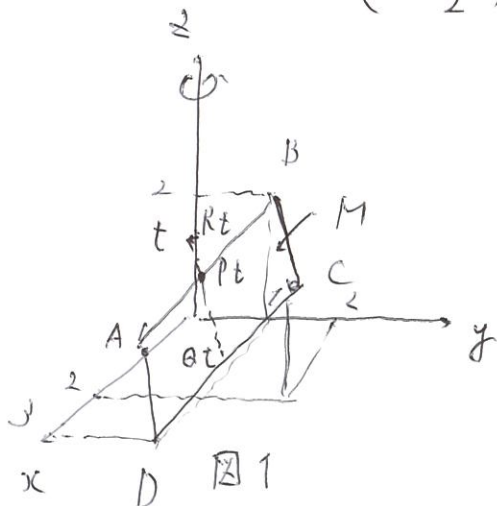


図 2

線分 P_tQ_t とこの面の上から見ると、
 90°に回転すると 図 2 の
 斜線部分のような同じ円
 が図 2 の図 1 になるから
 概形は ⑧ ... (答)

この面積を S_t とおくと

$$\begin{aligned} S_t &= \pi R_t^2 Q_t^2 - \pi R_t^2 P_t^2 \\ &= \pi \left\{ \left(3 - \frac{t}{2}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 \right\} - \pi \left\{ \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \pi \left(9 - 3t + \frac{t^2}{4} + 1 + t + \frac{t^2}{4}\right) - \pi \left(1 - t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4}\right) \\ &= \pi (9 - t) \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ のとき } S_1 = \pi (9 - 1) = 8\pi \quad \dots (\text{答})$$

(3) K の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S_t dt = \pi \int_0^2 (9 - t) dt = \pi \left[9t - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \pi \left(9 \cdot 2 - \frac{4}{2} \right) = 16\pi \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $P(a, b, c)$ が K 上を動くとき、 $OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$ だから

原点から最も遠い点 P を見つければよい。 M をこの軸のまわりに回転しても M 上の点の原点からの距離は不変だから、平行四辺形 $ABCD$ で考えればよい。図1より、原点から最も遠いのは D か C だ。

$$OD^2 = 3^2 + 1^2 = 10, \quad OC^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

よって $a^2 + b^2 + c^2$ の最大値は 12 ... (答)

<講評>

第1問 (1) 合成, 和積の公式 (易)

どう三角関数も値はわからないのでまことと考えるのが針はすぐ立つ。

(2) 直線束 (標準)

2つの放物線の2交点を通る直線だから, 交点を考えずに束にしようが早い。

(3) 絶対値を含む定積分 (標準)

$\sqrt{x^2} = |x|$ に気をつけて計算する。

(4) 円分方程式 (標準)

$z^n = 1$ とみたて解は正 n 角形となすことと, z^{n-1} が解と作って因数できることを使う典型題。

第2問 部分集合 (1) 易 (2)(3) 標準)

(2)(3) では B と C 両方と考えるのは大変だから, まづは例えば C の集合から考えるといい。
計算は二項定理による。

第3問 整数の相数 (1) 易 (2)(3) 標準)

(2) は $n = 100$ まづ n から具体的に相数を考えていってと時間がかからない。
(3) は典型題。

第4問 空間図形の回転体 (1) 易 (2)~(4) 標準)

(1) 直線のベクトル方程式を使う。
(2) K と L の共通部分が線分だから, 状況はわかる。
(3) K と L の切り口を計算し, 積分する典型題。
(4) M 上 (回転する前) で与つければよい。

第2問 (2)(3) と第3問 (2) は方針を考えていかなければならないが, あとは典型的, 時間と考えると, 70~80% 必要。