医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和大学（医）　数学

試験日 2 月 7 日（金）

1 (1) $|\alpha|=\sqrt{2}$ より $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=2$　$\therefore\ \overline{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$ ―①

$|\beta|=4$ より $|\beta|^2=\beta\overline{\beta}=16$　$\therefore\ \overline{\beta}=\dfrac{16}{\beta}$ ―②

$|4\alpha-\beta|=4$ より $|4\alpha-\beta|^2=(4\alpha-\beta)\overline{(4\alpha-\beta)}=16$

よって，$(4\alpha-\beta)(4\overline{\alpha}-\overline{\beta})=16$ より $4|\alpha|^2-4\alpha\overline{\beta}-4\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2=16$

$|\alpha|=\sqrt{2}$, $|\beta|=4$ より $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=8$

これに①②を代入して $\alpha\cdot\dfrac{16}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha}\cdot\beta=8$

ここで，$z=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$\dfrac{16}{z}+2z=8$　すなわち $z^2-4z+8=0$

これより，$z=2\pm 2i$　　$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=2\pm 2i$ （答）

$\dfrac{\beta}{\alpha}=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ であるから，ド・モアブルの定理より

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4=(2\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\times4\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\times4\right)\right\}=64\{\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)\}$

$=64\times(-1)=-64$ （答）

(2) $|\alpha+\beta|=\left|\alpha\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right|=|\alpha|\cdot\left|1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{2}\,|1+2\pm2i|$

$=\sqrt{2}\,|3\pm2i|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{26}$ （答）

(3) $n=16k+3$ （k は整数）とおくと，ド・モアブルの定理より

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=(2\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(\pm\dfrac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{n\pi}{4}\right)\right\}$ （以下，複号同順とする）

$=2^{\frac{3}{2}n}\left\{\cos\left(\pm4k\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm4k\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}\right)\right\}$

$=2^{\frac{3}{2}n}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{3\pi}{4}\right)\right\}=2^{\frac{3}{2}n}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

よって，$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}(-1\pm i)$ となるので，

$$\begin{aligned}
|\alpha^n+\beta^n| &= \left|\alpha^n\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}\right| = |\alpha^n|\cdot\left|1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right| \\
&= |\alpha|^n\cdot\left|1+2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}(-1\pm i)\right| = (\sqrt{2})^n\cdot\left|1-2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}\pm 2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}i\right| \\
&= \sqrt{2^n}\cdot\sqrt{\left(1-2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\pm 2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{2^n\left(1-2\cdot 2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}+2^{3n-1}+2^{3n-1}\right)} \\
&= \sqrt{2^n\left(1-2^{\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}}+2^{3n}\right)}
\end{aligned}$$

これより，$a=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$，$b=3n$ （答）

(4) 複素数平面上 α, β で表される点をそれぞれ A, B とする．

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

であるから，

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $\pm\frac{\pi}{4}$ （反時計回りを正とする）

$|\overrightarrow{OA}|=|\alpha|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{OB}|=|\beta|=4$

よって，△OAB の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 2 \quad (答)$$

$\boxed{2}$ (1)(1-1)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1928\,\overline{)\,2025} \\ \underline{1928} \\ 97 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ 97\,\overline{)\,1928} \\ \underline{97} \\ 958 \\ \underline{873} \\ 85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 85\,\overline{)\,97} \\ \underline{85} \\ 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ 12\,\overline{)\,85} \\ \underline{84} \\ 1 \end{array}$$

2つの正の整数 a, b の最大公約数を (a, b) で表すとすると、ユークリッドの互除法より、

$$(2025, 1928) = (1928, 97) = (97, 85) = (85, 12) = 1$$

よって、2025と1928の最大公約数は 1 (答)

(別解) $2025 = 3^4 \times 5^2$, $1928 = 2^3 \times 401$ と素因数分解して求めてもよい。
ただし、そうすると (1-2) で結局、上の割り算を計算しなければならなくなる。

(1-2)

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \frac{97}{1928} = 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{85}{97}} = 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{85}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12}}}}$$

よって、 $a_1 = 19$, $a_2 = 1$, $a_3 = 7$, $a_4 = 12$ (答)

(2) 因数定理より、$g(x)$ が $f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right)$ で割り切れる必要十分条件は

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \quad \text{—①} \quad \text{かつ} \quad g\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \text{—②}$$

ここで、① について、

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a^2}{4} - 2\right) = \left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{16}(a+2)(a-4)(a^2 - 2b - 8)$$

同様にして、 $g\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{16}(b+2)(b-4)(b^2 - 2a - 8)$

よって、条件 ① かつ ② は、

$$\begin{cases} a = -2 \text{ または } a = 4 \text{ または } a^2 - 2b - 8 = 0 \\ b = -2 \text{ または } b = 4 \text{ または } b^2 - 2a - 8 = 0 \end{cases}$$

ここで、$\begin{cases} a = -2 \\ b^2 - 2a - 8 = 0 \end{cases}$ のとき、$b = \pm 2$、 $\begin{cases} a = 4 \\ b^2 - 2a - 8 = 0 \end{cases}$ のとき、$b = \pm 4$

同様にして、$\begin{cases} a^2 - 2b - 8 = 0 \\ b = -2 \end{cases}$ のとき、$a = \pm 2$、 $\begin{cases} a^2 - 2b - 8 = 0 \\ b = 4 \end{cases}$ のとき、$a = \pm 4$

また、$\begin{cases} a^2 - 2b - 8 = 0 & \text{—③} \\ b^2 - 2a - 8 = 0 & \text{—④} \end{cases}$ のとき、③ − ④ より $(a-b)(a+b+2) = 0$ となり、$a < b$ より $a+b+2 = 0$

$b = -a - 2$ を ③ に代入して、$a^2 + 2a - 4 = 0$ より $a = -1 \pm \sqrt{5}$ となり、整数でないから不適。

よって、$a < b$ を考慮して、$(a, b) = (-4, 4), (-2, 2), (-2, 4)$ (答)

(3) (3−1) (i) $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y > 0 \end{cases}$ より、与式は $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

よって $\log_{\frac{1}{2}}(xy) \leqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ より $xy \geqq \frac{1}{2}$　　∴ $y \geqq \frac{1}{2x}$

(ii) $\begin{cases} x \geqq 1 \\ 0<y<1 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leqq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y > 0 \end{cases}$ より、与式は $-\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

よって $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right) \leqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ より $\frac{y}{x} \geqq \frac{1}{2}$　　∴ $y \geqq \frac{1}{2}x$

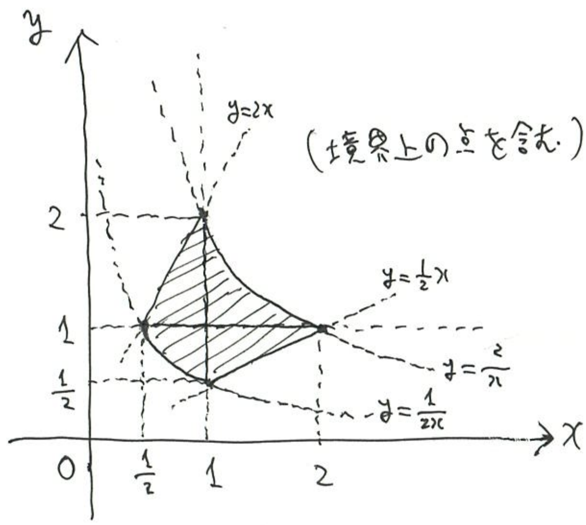
(iii) $\begin{cases} 0<x<1 \\ y \geqq 1 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 0 \end{cases}$ より、与式は $\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

よって $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) \leqq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ より、$\frac{x}{y} \geqq \frac{1}{2}$　　∴ $y \leqq 2x$

(iv) $\begin{cases} x \geqq 1 \\ y \geqq 1 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leqq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 0 \end{cases}$ より、与式は $-\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y \leqq 1$

よって $\log_{\frac{1}{2}}(xy) \geqq -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$ より、$xy \leqq 2$　　∴ $y \leqq \frac{2}{x}$

以上より、領域Eを図示すると、



(3−2)

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x} - 1\right) + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\log x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[2\log x - x\right]_{1}^{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + 2\log 2 - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\log 2$$ （答）

(4) kを正の整数とするとき、$k \leqq x \leqq k+1$において $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ —① より

これを区間 $[k, k+1]$ で定積分して $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$

よって、$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$　（①で等号は恒等的に等号成立しないので、積分後は等号不成立）

これを、$k=1, 2, 3, \cdots, n-1$ まで加えて、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

ここで、$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^n x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^n = 2(\sqrt{n}-1)$ より、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

よって、$\displaystyle 2(\sqrt{n}-1) + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-1) + 1$

$$\therefore 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} < S_n < 2\sqrt{n} - 1$$

ここで、$n = 2025$ とすると、$\sqrt{2025} = 45$ より

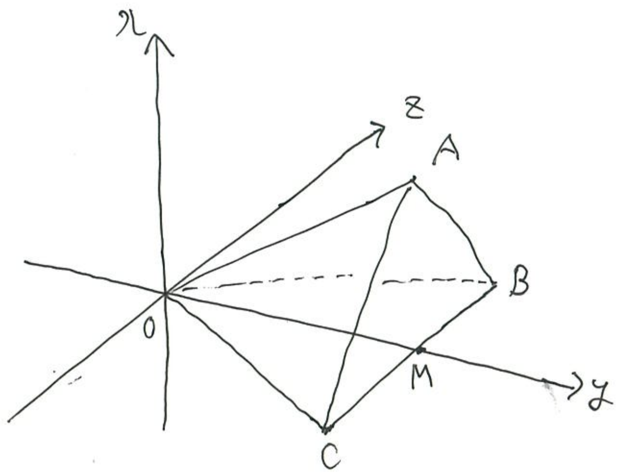
$$88 + \frac{1}{\sqrt{45}} < S_{2025} < 89$$

よって、S_{2025} の整数部分は 88（答）

3 (1) △OABは正三角形であり，OA=1であるから，OB=1 かつ AB=1

また，B, C は yz 平面上において y 軸に関して対称であるから，

$OC=OB=1$ ，$AC=AB=1$ となる。



$OA=OB=OC=AB=AC=1$

$A(a, b, 0)$ とおくと，

$OA=1$ より $a^2+b^2=1$

Aは y 軸上にないので $a \neq 0$

よって，b のとりうる値の範囲は，

$-1<b<1$ ――①

$B(0, t, u)$ とおくと，

$OB=1$ より $t^2+u^2=1$

Bは y 軸上にないので $u \neq 0$

よって，t のとりうる値の範囲は，

$-1<t<1$ ――②

また，$AB=1$ より $a^2+(b-t)^2+u^2=1$

$a^2+b^2-2bt+t^2+u^2=1$

$a^2+b^2=1$，$t^2+u^2=1$ より $2bt=1$　　$\therefore\ b=\dfrac{1}{2t}$ ――③

③を①に代入して，$-1<\dfrac{1}{2t}<1$　よって，$t<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<t$

したがって，②とあわせて，t がとり得る値の範囲は，

$-1<t<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<t<1$　（答）

(2) 線分BCと y 軸の交点をMとおくと $M(0, t, 0)$ であり，$BM=CM=\sqrt{1-t^2}$ より

$BC=2\sqrt{1-t^2}$ となる。△OABと△OACは，ともに1辺の長さ1の正三角形

であり，△OBCと△ABCは，ともに等辺の長さ1，底辺の長さ $2\sqrt{1-t^2}$ の二等辺

三角形であるから，四面体OABCの表面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=2\cdot\triangle OAB+2\cdot\triangle OBC=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-t^2}\cdot t$$

$$\therefore\ S(t)=2t\sqrt{1-t^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S'(t)=2\cdot1\cdot\sqrt{1-t^2}+2t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}=2\cdot\frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

対称性より $\frac{1}{2}<t<1$ における $S(t)$ の最大値を考えればよい。

t	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、$t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $S(t)$ は最大値

$S\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$（答）をとる。

(3) $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ として、$B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$C\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおいても一般性を失わない。

このとき、(1)より $2bt=1$ であるから $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが、

$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ とおいても一般性を失わない。

（V_x について）

四面体OABCを平面 $x=u$ $\left(0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で切った断面を yz 平面に正射影した図を考える。

平面 $x=u$ と辺OAの交点は、

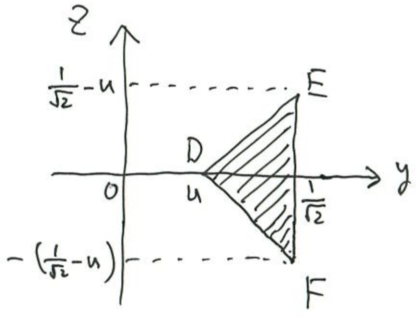
$$k\overrightarrow{OA}=\left(\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}},0\right)\text{ で }\frac{k}{\sqrt{2}}=u\text{ より }(u,u,0)$$

平面 $x=u$ と辺ABの交点は、

$$k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}=\left(\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}}+\frac{1-k}{\sqrt{2}},\frac{1-k}{\sqrt{2}}\right)\text{ で }\frac{k}{\sqrt{2}}=u\text{ より }\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}-u\right)$$

平面 $x=u$ と辺ACの交点は、対称性より $\left(u,\frac{1}{\sqrt{2}},-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-u\right)\right)$

よって、切り口の三角形を yz 平面に正射影した図は、下図のようになる。



x 軸のまわりの回転体の平面 $x=u$ による切り口の断面積を、$T_x(u)$ とおくと、左図の三角形を原点のまわりに一回転させたときの通過領域の面積より

$$T_x(u)=\pi(OE)^2-\pi(OD)^2=\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-u\right)^2\right\}-\pi u^2=\pi(1-\sqrt{2}u)$$

よって、
$$V_x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}T_x(u)\,du=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-\sqrt{2}u)\,du=\pi\left[u-\sqrt{2}\cdot\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\text{（答）}$$

（V_y について）

四面体OABCを平面 $y=u$ $\left(0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で切った断面を xz 平面に正射影した図を考える。

平面 $y=u$ と辺OAの交点は、

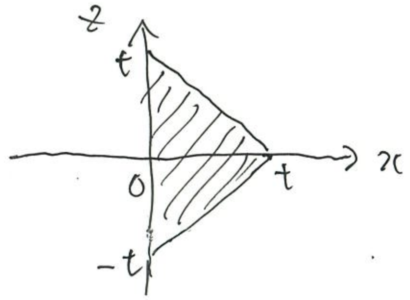
$k\overrightarrow{OA}=\left(\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}},0\right)$ で $\frac{k}{\sqrt{2}}=u$ より　$(u,u,0)$

平面 $y=u$ と辺OBの交点は、

$k\overrightarrow{OB}=\left(0,\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ で $\frac{k}{\sqrt{2}}=u$ より　$(0,u,u)$

対称性より、平面 $y=u$ と辺OCの交点は、$(0,u,-u)$

よって、切り口の三角形を xz 平面に正射影した図は、下図のようになる。



y 軸のまわりの回転体の平面 $y=u$ による切り口の断面積を、$T_y(u)$ とおくと、左図の三角形を原点のまわりに一回転させたときの通過領域の面積より

$T_y(u)=\pi u^2$

よって、$V_y=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}T_y(u)\,du=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi u^2\,du=\pi\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$　（答）

（V_z について）

四面体OABCを平面 $z=u$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で切った断面を xy 平面に正射影した図を考える。対称性より $0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分を考える。

平面 $z=u$ と辺OBの交点は、

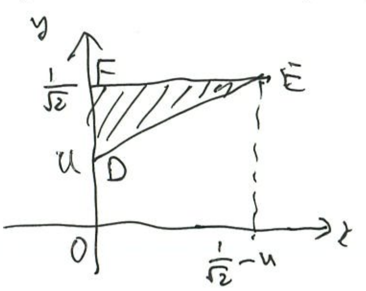
$k\overrightarrow{OB}=\left(0,\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ で $\frac{k}{\sqrt{2}}=u$ より　$(0,u,u)$

平面 $z=u$ と辺ABの交点は、

$(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1-k}{\sqrt{2}},\frac{1-k}{\sqrt{2}}+\frac{k}{\sqrt{2}},\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ で $\frac{k}{\sqrt{2}}=u$ より $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-u,\frac{1}{\sqrt{2}},u\right)$

平面 $z=u$ と辺BCの交点は　$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},u\right)$

よって、切り口の三角形を xy 平面に正射影した図は、下図のようになる。



z 軸のまわりの回転体の平面 $z=u$ による切り口の断面積を、$T_z(u)$ とおくと、

$T_z(u)=\pi\cdot OE^2-\pi OD^2=\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-u\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}-\pi u^2$

$=\pi(1-\sqrt{2}u)$

よって、対称性を考慮して、V_x の計算を参照して、

$$V_z = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} T_z(u)\,du = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1-\sqrt{2}u)\,du = 2V_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad (答)$$

$\boxed{4}$ (A) 原点のまわりに反時計回り 15° の回転 $\longrightarrow$ 確率 $\frac{1}{3}$

(B) 原点から 1 だけ遠ざける $\longrightarrow$ 確率 $\frac{2}{3}$

(1)（P_1 について）

(A)が 6 回続けて起こるときより $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ (答)

（P_2 について）

(A)が 5 回と(B)が 1 回起こった後、最後に(A)が起こるときより

$$P_2 = {}_6C_5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{729} \quad (答)$$

（P_3 について）

(A)が 5 回と(B)が 2 回起こった後、最後に(A)が起こるときより

$$P_3 = {}_7C_5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{2187} \quad (答)$$

(2) (A)が 5 回と(B)が $n-1$ 回起こった後、最後に(A)が起こるときより

$$P_n = {}_{n+4}C_5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^{n+5}}$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \cdot 2^{n-4}}{5\cdot 3^{n+6}} \quad (答)$$

(3)

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\cdot 2^{n-3}}{5\cdot 3^{n+7}} \cdot \frac{5\cdot 3^{n+6}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n\cdot 2^{n-4}}$$

$$= \frac{2(n+5)}{3n}$$

よって、$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ となるのは、$2n+10 > 3n$ より $n < 10$

これより、
$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 9 \text{ のとき、} P_n < P_{n+1} \\ n = 10 \text{ のとき、} P_{10} = P_{11} \\ 11 \leqq n \text{ のとき、} P_n > P_{n+1} \end{cases}$$
となるので、$P_1 < P_2 < \cdots < P_{10} = P_{11} > P_{12} > \cdots$ となる。

P_n を最大にする n は $n = 10, 11$ (答)