

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

慶応義塾大学 (医) 数学

試験日 2月9日 (日)



[I] (1) 高校3年生女子の身長の変数 X とすると, $Z = \frac{X-158}{5}$ で表される
変数は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$153 \leq X \leq 170.5$ のとき, $-1 \leq Z \leq 2.5$ となるから,

$$\begin{aligned} P(153 \leq X \leq 170.5) &= P(-1 \leq Z \leq 2.5) = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.3413 + 0.4938 = 0.8351 \end{aligned}$$

よって, 約 83.51% であるが, 小数第1位を四捨五入して約 84% (答) ← (ア)

$$P(Z \leq u_0) = 0.025 \text{ とすると, } P(u_0 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.025 = 0.475$$

よって, $P(0 \leq Z \leq -u_0) = 0.475$ となるから, $P(0 \leq Z \leq 1.80) = 0.4641$,

$P(0 \leq Z \leq 2.00) = 0.4772$ より $1.80 < -u_0 < 2.00$ である,

$$\therefore u_0 = \frac{x_0 - 158}{5} \text{ とすると, } 1.80 < -\frac{x_0 - 158}{5} < 2.00 \text{ より } 148 < x_0 < 149$$

よって, 身長が148以上から2.5%の中に入るのは $x < x_0$ のときより, 最も大きい整数値は 148 (答)
← (イ)

(2) $\int_1^e f(x) dx = 1$ となる r が必要であり,

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e r x \log x dx = r \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e - r \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} r - r \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} r - \frac{e^2 - 1}{4} r = \frac{e^2 + 1}{4} \cdot r \end{aligned}$$

$$\frac{e^2 + 1}{4} \cdot r = 1 \text{ より } r = \frac{4}{e^2 + 1} \text{ (答) } \leftarrow (i)$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^3 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) &= \int_0^1 \sin^3 \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx = \int_0^1 \{1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} x \right)\} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx \\ &\quad \left(t = \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = -\frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \text{ より } \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx = -\frac{2}{\pi} dt \quad \begin{array}{l} x | 0 \rightarrow 1 \\ t | 1 \rightarrow 0 \end{array} \right) \\ &= \int_1^0 (1 - t^2) \left(-\frac{2}{\pi} \right) dt = \frac{2}{\pi} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3\pi} \text{ (答) } \leftarrow (ii) \end{aligned}$$

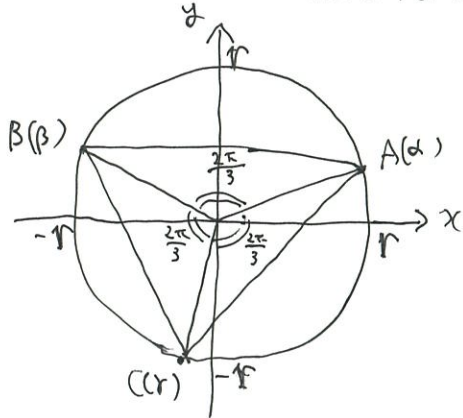
(4) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおく. $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ であり.

これから $12(1 + \sqrt{3}i) = 24(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ となる.

$$\begin{cases} r^3 = 24 \\ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n: \text{整数}) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} r = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \\ \theta = \frac{(6n+1)\pi}{9} \quad (n=0, 1, 2) \end{cases}$$

$\alpha = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})$, $\beta = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9})$, $\gamma = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9})$

とすると, $\triangle ABC$ は正三角形となる. よって, その面積は



$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 3 \times \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3^{\frac{1}{3}})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3^{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = 3^{\frac{13}{6}} \end{aligned}$$

よって, $\triangle ABC = 3^s$ とすると $s = \frac{13}{6}$ ($\frac{46}{6}$) ← (お)

(5) $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}$ より $a\sqrt{2}+b = 4c+2\sqrt{2}d$ となる. $(a-2d)\sqrt{2} = 4c-b$ — ①

ここで, $a-2d \neq 0$ と仮定すると $\sqrt{2} = \frac{4c-b}{a-2d}$ となる. a, b, c, d は整数より

右辺は有理数となり $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する.

よって, $a-2d=0$ となければならず, このとき, ①より $4c-b=0$ となる.

ここで, $a=2d$, $b=4c$ を $ad+bc=181$ に代入して, $d^2+2c^2=9$ を得る.

ここで, $9-2c^2=d^2 \geq 0$ より $c^2 \leq \frac{9}{2}$ であり, c は整数より $c^2=0, 1, 4$

$c < 0$ とすると $b=4c$ より $b \geq 0$ に矛盾するのより $c \geq 0$ であり, $c=0, 1, 2$

同様に, $d < 0$ とすると $a=2d$ より $a \geq 0$ に矛盾するのより $d \geq 0$ であり,

$c=0$ のとき $d^2=9$ より $d=3$ であり, $a=2d=6$, $b=4c=0$

$c=1$ のとき $d^2=7$ より 解なし

$c=2$ のとき $d^2=1$ より $d=1$ であり, $a=2d=2$, $b=4c=8$

以上より, $(a, b, c, d) = (6, 0, 0, 3), (2, 8, 2, 1)$ ($\frac{46}{6}$)

[II] (1) $n+1$ 回後に白玉の個数が 3 個であるのは、 n 回後に白玉の個数が 3 個で、
 $n+1$ 回目にも赤玉が取り出される場合であり、 n 回後の袋の中は赤玉 3 個白玉 3 個より、

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{3}{6} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{ホ})$$

$n+1$ 回後に白玉の個数が 2 個であるのは、

(i) n 回後に白玉の個数が 3 個で、 $n+1$ 回目にも白玉が取り出される場合 (n 回後は赤玉 3 個白玉 3 個)

(ii) n 回後に白玉の個数が 2 個で、 $n+1$ 回目にも赤玉が取り出される場合 (n 回後は赤玉 3 個白玉 2 個)

のいずれかの場合であり、

$$b_{n+1} = a_n \times \frac{3}{6} + b_n \times \frac{3}{5} \quad \therefore b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{5} b_n \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{イ})(\text{ロ})$$

$n+1$ 回後に白玉の個数が 1 個であるのは、

(i) n 回後に白玉の個数が 2 個で、 $n+1$ 回目にも白玉が取り出される場合 (n 回後は赤玉 3 個白玉 2 個)

(ii) n 回後に白玉の個数が 1 個で、 $n+1$ 回目にも赤玉が取り出される場合 (n 回後は赤玉 3 個白玉 1 個)

$$c_{n+1} = b_n \times \frac{2}{5} + c_n \times \frac{3}{4} \quad \therefore c_{n+1} = \frac{2}{5} b_n + \frac{3}{4} c_n \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{エ})(\text{オ})$$

$$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \text{ より } a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{カ})$$

$$b_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{3}{5} b_n \quad (= a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ を当てはめ}),$$

$$b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{この両辺に } 2^{n+1} \text{ を掛けよう。}$$

$$2^{n+1} b_{n+1} = \frac{6}{5} \cdot 2^n b_n + 1 \quad \therefore \text{ここで、} u_n = 2^n b_n \text{ とおくと、} u_1 = 2 \cdot b_1 = 1 \text{ であり、}$$

$$u_{n+1} = \frac{6}{5} u_n + 1 \quad \text{これを整理して } u_{n+1} + 5 = \frac{6}{5} (u_n + 5)$$

$$\therefore, \quad u_n + 5 = (u_1 + 5) \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} \quad u_1 = 1 \text{ より } u_n = 6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} - 5$$

$$u_n = 2^n b_n \text{ より、} b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left\{ 5 \cdot \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} - 5 \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left\{ 5 \left(\frac{6}{5}\right)^n - 5 \right\}$$

$$(\text{つまり、}) \quad b_n = 5 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{キ})(\text{ク})(\text{ケ})$$

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = \frac{2}{5} b_n + \frac{3}{4} c_n \quad (= b_n = 5 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \text{ を当てはめ}).$$

$$c_{n+1} = \frac{3}{4} c_n + 2 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \text{この両辺に } \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \text{ を掛けよう。}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} c_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n c_n + 2 \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \therefore \text{ここで、} v_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n c_n \text{ とおくと、}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{8}{3} \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}, \quad v_1 = \frac{4}{3} c_1 = 0$$

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} v_n &= v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{8}{3} \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^k - \left(\frac{2}{3}\right)^k \right\} = 0 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{\frac{4}{5} \{1 - (\frac{4}{5})^{n-1}\}}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{\frac{2}{3} \{1 - (\frac{2}{3})^{n-1}\}}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(4 \{1 - (\frac{4}{5})^{n-1}\} - 2 \{1 - (\frac{2}{3})^{n-1}\} \right) = \frac{16}{3} \cdot \{1 - 2 \cdot (\frac{4}{5})^{n-1} + (\frac{2}{3})^{n-1}\} \end{aligned}$$

これは、 $n=1$ のとき $\frac{16}{3} (1 - 2 + 1) = 0$ より $v_1 = 0$ を満たす。

(したがって、 $n \geq 1$ のとき $v_n = \frac{16}{3} \cdot \{1 - 2 \cdot (\frac{4}{5})^{n-1} + (\frac{2}{3})^{n-1}\}$ であり、

$$v_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n c_n \text{ より } c_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n v_n = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{16}{3} \{1 - 2 \cdot (\frac{4}{5})^{n-1} + (\frac{2}{3})^{n-1}\} \text{ より}$$

$$c_n = 4 \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \quad \left(\frac{3}{5}\right) \leftarrow (二)(十)(五)(十)(世)$$

(2) $X_n = 0$ となるのは 1 回目に白玉を取り出すときより $P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$

$X_n = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) となるのは、 k 回後に白玉が 3 個で $k+1$ 回目に白玉を取り出すときより、 $P(X_n = k) = a_n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

(ただし、この場合は $n=1$ のときには適用しない)

$X_n = n$ となるのは、 n 回後に白玉が 3 個である場合より、 $P(X_n = n) = a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

以上をまとめると、

$$P(Y_n = 2^k) = P(X_n = k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & (0 \leq k \leq n-1 \text{ のとき}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & (k=n \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって、 Y_n の期待値 $E(Y_n)$ は

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^n 2^k \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}n + 1 \quad \left(\frac{3}{5}\right) \leftarrow (三) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} E(Y_n^2) &= \sum_{k=0}^n (2^k)^2 \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 2^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} + 2^n = \frac{\frac{1}{2}(2^n - 1)}{2 - 1} + 2^n = 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、 Y_n の分散 $V(Y_n)$ は

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= E(Y_n^2) - \{E(Y_n)\}^2 = 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}n + 1\right)^2 \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{4}n^2 - n - \frac{3}{2} \quad \left(\frac{3}{5}\right) \leftarrow (た)(ち)(つ)(て) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{III}] (1)(i) \quad P(Q(x)) &= 3(2x^2+1)^3 - 9(2x^2+1)^2 + 7(2x^2+1) \\
 &= 3(8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) - 9(4x^4 + 4x^2 + 1) + 7(2x^2 + 1) \\
 &= 24x^6 - 4x^2 + 1 \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{本})
 \end{aligned}$$

(ii) 「 m 次以下の多項式 $G(x)$ と $H(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ ($b_n \neq 0$) に対して、

$G(H(x)) = 0$ が x の恒等式ならば $G(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ とすると

$a_m = \dots = a_1 = a_0 = 0$ が成立する。」という命題を (P_m) とし、

これを m についての数学的帰納法で証明する。

[A] $m=1$ のとき、 $G(x) = a_1 x + a_0$ とすると、

$$\begin{aligned}
 G(H(x)) &= a_1 H(x) + a_0 = a_1 (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) + a_0 \\
 &= a_1 b_n x^n + \dots + a_1 b_1 x + a_1 b_0 + a_0 = 0
 \end{aligned}$$

が恒等式となるので、最高次の係数と定数項について

$$\begin{cases} a_1 b_n = 0 \\ a_1 b_0 + a_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\because b_n \neq 0 \text{ であるから } a_1 = 0 \text{ となり} \\ &\text{よって } a_0 = 0 \text{ も成立する。} \end{aligned}$$

$\therefore m=1$ のとき、 $a_1 = a_0 = 0$ が成立する。

[B] $m=l$ のとき、命題 (P_l) が成立すると仮定すると、

$$G(x) = a_{l+1} x^{l+1} + a_l x^l + \dots + a_1 x + a_0 \text{ に対して、}$$

$$\begin{aligned}
 G(H(x)) &= a_{l+1} (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0)^{l+1} + a_l (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0)^l \\
 &\quad + \dots + a_1 (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) + a_0 = 0
 \end{aligned}$$

が x の恒等式ならば、最高次の項 $a_{l+1} b_n^{l+1} x^{n(l+1)}$ の係数について

$$a_{l+1} b_n^{l+1} = 0 \text{ が成立するが、} b_n \neq 0 \text{ より } a_{l+1} = 0$$

よって、 $G(x) = a_l x^l + \dots + a_1 x + a_0$ となるが、

このとき、帰納法の仮定より $a_l = \dots = a_1 = 0$ となる。

よって、 $m=l+1$ のとき (P_{l+1}) が成立することが示された。

以上 [A][B] から、数学的帰納法により、すべての自然数 m に対して

命題 (P_m) は成立する。

(証明終)

$$(2)(i) \quad g(x) + h(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = g(1) = a$$

$$\therefore g(x) + h(x) = a \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{ホ})$$

$$g(h(x)) - \{h(x)\}^3 + b\{g(x)\}^2 + ch(x) + d = 0 \quad | \because g(x) = a - h(x) \text{ を適用して.}$$

$$g(h(x)) - \{h(x)\}^3 - b\{a - h(x)\}^2 - ch(x) - d = 0$$

$$\therefore g(h(x)) - \{h(x)\}^3 - b\{h(x)\}^2 - (c - 2ab)h(x) - a^2b - d = 0$$

が x についての恒等式と変えるので、

$$G(x) = g(x) - x^3 - bx^2 - (c - 2ab)x - a^2b - d \quad \text{と置く.}$$

$$G(h(x)) = 0 \quad \text{が } x \text{ についての恒等式と変える.}$$

$$\therefore \text{ここで、} h'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 f(t) dt = -f(x) \text{ であり、} f(x) \text{ は 0 でない多項式}$$

であるから、 $h(x)$ は 1 以上次の多項式であり、その次数を n 次として

$$h(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \text{ とすると } b_n \neq 0 \text{ であるから、(1)(ii) より}$$

$$G(x) = 0 \quad \text{が恒等的に成立して、}$$

$$g(x) = x^3 + bx^2 + (c - 2ab)x + a^2b + d \quad \text{--- ①}$$

$$\text{と変えるので、} g(x) \text{ は 3 次式} \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{イ})$$

$$\therefore \text{ここで、} g(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0 \quad \text{と ① より } g(0) = a^2b + d \text{ より}$$

$$a^2b + d = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{また、} g(1) = a \text{ と ① より } g(1) = 1 + b + c - 2ab + a^2b + d \text{ より、}$$

$$1 + b + c - 2ab + a^2b + d = a$$

$$\therefore \text{ここで、② より } 1 + b + c - 2ab = a \quad \text{--- ③}$$

$$\text{さらに、} g'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x) \text{ と ① より } g'(x) = 3x^2 + 2bx + c - 2ab \text{ より}$$

$$f(x) = 3x^2 + 2bx + c - 2ab \text{ とする、} f(1) = 2(1 - a) \text{ より}$$

$$3 + 2b + c - 2ab = 2(1 - a) \quad \text{--- ④}$$

$$\text{④} - \text{③} \text{ より } b + 2 = 2(1 - a) - a \therefore b = -3a \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{エ})$$

$$\text{③} \text{ に } b = -3a \text{ を代入して } c = -6a^2 + 4a - 1 \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{カ})$$

$$\text{②} \text{ に } b = -3a \text{ を代入して } d = 3a^3 \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{キ})$$

(ii) $g(x) = x^3 + bx^2 + (c-2ab)x + a^2b + d$ において.

$b = -3a$, $c-2ab = -6a^2+4a-1-2a \cdot (-3a) = 4a-1$, $a^2b+d=0$ より

$g(x) = x^3 - 3ax^2 + (4a-1)x$

$f(x) = g'(x) = 3x^2 - 6ax + 4a - 1$

この $f(x)$ が符号変化するところが $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件であり、方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、その必要十分条件は $D > 0$ であり、

$D/4 = 9a^2 - 3(4a-1) = 3(3a^2 - 4a + 1) > 0$

よ、 $(3a-1)(a-1) > 0$ より、求める必要十分条件は

$a < \frac{1}{3}$ または $a > 1$ (答) $\leftarrow$ (き)(く)

このとき、 $g'(x)=0$ の2解は $x = \frac{3a \pm \sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$ であり、

$\alpha = \frac{3a - \sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$, $\beta = \frac{3a + \sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$ とおくと、

x	...	α	...	β	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よ、 $g(x)$ が極大値をとる x の値は

$x = \alpha = \frac{3a - \sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$ (答) $\leftarrow$ (た)

$y = g(x)$ と $y = M$ は $x = \alpha$ で接するので、方程式 $g(x) = M$ は $x = \alpha$ を重解にもつ。よ、 3 次方程式 $g(x) = M$ の3解を $x = \alpha, \alpha, \gamma$ とおくと、

$x^3 - 3ax^2 + (4a-1)x - M = 0$ において 解と係数の関係より

$\alpha + \alpha + \gamma = 3a$ $\therefore \gamma = 3a - 2\alpha = \frac{3a + 2\sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$

よ、方程式 $g(x) = M$ の解は

$x = \frac{3a - \sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$ と $x = \frac{3a + 2\sqrt{3(3a-1)(a-1)}}{3}$ (答) $\leftarrow$ (こ)

(iii) $g(a) = a^3 - 3a \cdot a^2 + (4a-1) \cdot a = -2a^3 + 4a^2 - a$

$g'(a) = 3a^2 - 6a \cdot a + 4a - 1 = -3a^2 + 4a - 1$

よ、 $y = g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ における接線の方程式は

$y - g(a) = g'(a)(x - a)$ より $y - (-2a^3 + 4a^2 - a) = (-3a^2 + 4a - 1)(x - a)$

$\therefore y = (-3a^2 + 4a - 1)x + a^3$ (答) $\leftarrow$ (さ)(し)

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^a \{g(x) - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\
 &= \int_0^a \{x^3 - 3ax^2 + (4a-1)x - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\
 &= \int_0^a \{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \\
 &= \int_0^a \{(x-a)^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx \quad \left(\begin{array}{l} t = \frac{(x-a)^2}{2} \quad x \neq a \quad \frac{dt}{dx} = x-a \\ \therefore (x-a)dx = dt \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow a \\ \hline t & \frac{a^2}{2} \rightarrow 0 \end{array} \end{array} \right) \\
 &= \int_{\frac{a^2}{2}}^0 (2t-2) e^{-t} dt = -2 \int_0^{\frac{a^2}{2}} (t-1) e^{-t} dt \\
 &= -2 \left[(t-1)(-e^{-t}) \right]_0^{\frac{a^2}{2}} + 2 \int_0^{\frac{a^2}{2}} 1 \cdot (-e^{-t}) dt \\
 &= 2 \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) e^{-\frac{a^2}{2}} + 2 + 2 \left[-e^{-t} \right]_0^{\frac{a^2}{2}} = (a^2 - 2) e^{-\frac{a^2}{2}} + 2 + 2(e^{-\frac{a^2}{2}} - 1) \\
 &= a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore F(a) = a^2 e^{-\frac{a^2}{2}} \quad \left(\frac{16}{5} \right) \leftarrow (イ)$$

$$F'(a) = 2a e^{-\frac{a^2}{2}} + a^2 \cdot e^{-\frac{a^2}{2}} \cdot (-a) = a(2 - a^2) e^{-\frac{a^2}{2}} = -a(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) e^{-\frac{a^2}{2}}$$

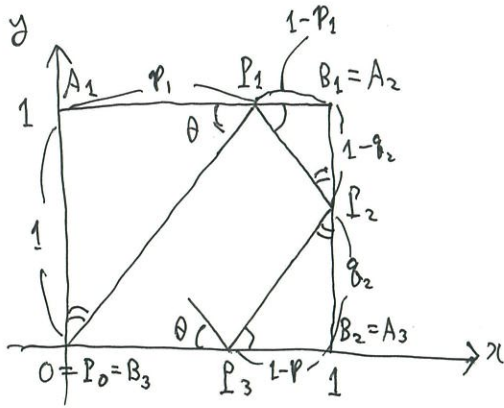
$F(-a) = F(a)$ より $F(a)$ は偶関数であるから、対称性より $a \geq 0$ における $F(a)$ の最大値を求めればよい

a	0	...	$\sqrt{2}$	...
$F'(a)$		+	0	-
$F(a)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって、 $a = \pm\sqrt{2}$ のとき $F(a)$ は最大値

$$F(\pm\sqrt{2}) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \left(\frac{16}{6} \right) \leftarrow (世)$$

[IV] (1) y



$\triangle P_0 P_1 A_1 \sim \triangle P_2 P_1 A_2 \sim \triangle P_2 P_3 A_3$
と仮定して.

$$1:p_1 = (1-q_2):(1-p_1) = q_2:(1-p)$$

よって

$$\begin{cases} p_1 q_2 = 1-p & \text{--- ①} \\ (1-p_1) q_2 = (1-q_2)(1-p) & \text{--- ②} \end{cases}$$

②より $q_2 - p_1 q_2 = 1-p - (1-p) q_2$ に ①を代入して.

$$q_2 - (1-p) = 1-p - (1-p) q_2$$

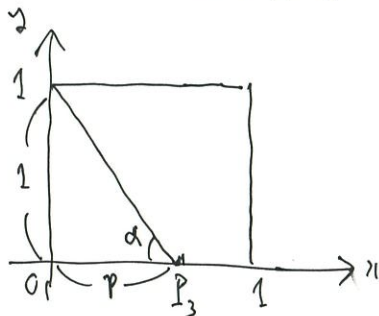
$$\text{よって } (2-p) q_2 = 2(1-p) \quad \therefore q_2 = \frac{2(1-p)}{2-p} \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{い})$$

$$\text{①に代入して } p_1 \cdot \frac{2(1-p)}{2-p} = 1-p$$

よって p_3 は正の数の値であるから $1-p \neq 0$ であり,

$$p_1 = \frac{2-p}{2} \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{あ})$$

図で $\theta = \angle P_0 P_1 A_1$ とおくと $\tan \theta = \frac{1}{p_1} = \frac{2}{2-p}$

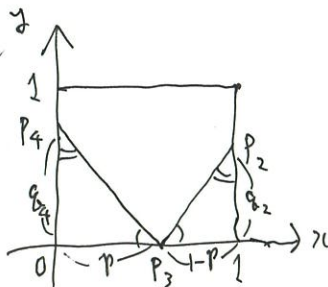


左図のように角 α を定める

$$\tan \alpha = \frac{1}{p}$$

θ と α の大小で場合分けする.

$\theta \leq \alpha$ のとき $\tan \theta \leq \tan \alpha$ より $\frac{2}{2-p} \leq \frac{1}{p}$ すなわち $p \leq \frac{2}{3}$



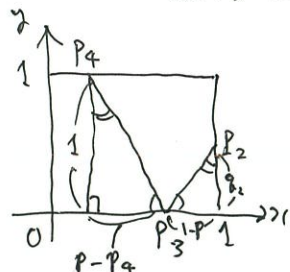
$$q_4:p = q_2:1-p \text{ より}$$

$$q_4 = \frac{p q_2}{1-p} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{2(1-p)}{2-p} = \frac{2p}{2-p}$$

よって $0 < p \leq \frac{2}{3}$ (答) のとき $\leftarrow (\text{き})$

$$(p_4, q_4) = (0, \frac{2p}{2-p}) \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{こ})$$

$\theta \geq \alpha$ のとき $\tan \theta \geq \tan \alpha$ より $p \geq \frac{2}{3}$

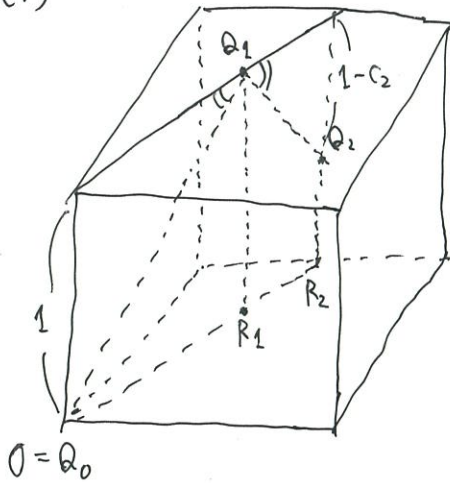


$$(p-p_4):1 = (1-p):q_2 \text{ より}$$

$$p-p_4 = \frac{1-p}{q_2} \text{ すなわち } p_4 = p - \frac{1-p}{q_2} = \frac{3p-2}{2}$$

よって $\frac{2}{3} \leq p < 1$ のとき $(p_4, q_4) = (\frac{3p-2}{2}, 1)$ (答) $\leftarrow (\text{か})$

(2)(i)



$$Q_0(0,0,0), Q_1(a_1, b_1, 1), Q_2(a_2, 1, c_2), \\ R_1(a_1, b_1, 0), R_2(a_2, 1, 0)$$

直線 Q_0R_1 上の点 R は

$$\vec{OR} = r\vec{OQ_0} + (1-r)\vec{OR_1} = (1-r)(a_1, b_1, 0) \quad (r: \text{実数})$$

と表され、これを平面 $y=1$ の交点において

$$(1-r)b_1 = 1 \quad \therefore r = \frac{1}{b_1}$$

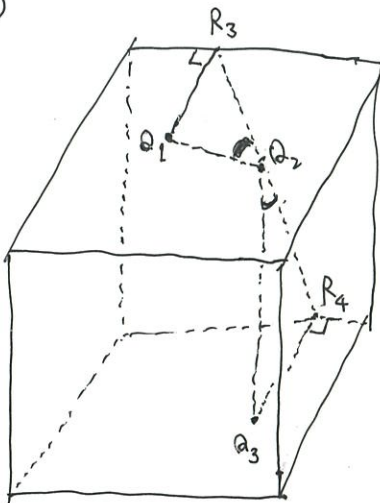
$$\therefore \text{交点} = \left(\frac{a_1}{b_1}, 1, 0\right) \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{か})$$

$$\text{これが点 } R_2 \text{ より } a_2 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\text{また、} 1 : (1-c_2) = Q_0R_1 : R_1R_2 \text{ より } 1 : (1-c_2) = b_1 : (1-b_1)$$

$$\text{よって、} 1-c_2 = \frac{1-b_1}{b_1} \quad \text{よって } c_2 = \frac{2b_1-1}{b_1}$$

(ii)



$$Q_1(a_1, b_1, 1), Q_2(a_2, 1, c_2), Q_3(a, b, 0), \\ R_3(a_1, 1, 1), R_4(a, 1, 0)$$

R_3, Q_2, R_4 が一直線上にあることより

$$\vec{OQ_2} = (1-r)\vec{OR_3} + r\vec{OR_4}$$

$$(a_2, 1, c_2) = (1-r)(a_1, 1, 1) + r(a, 1, 0) \quad (r: \text{実数})$$

$$\begin{cases} a_2 = (1-r)a_1 + ra \\ c_2 = 1-r \end{cases}$$

$$\therefore a_2 = c_2 a_1 + (1-c_2)a \quad \text{「交点」の式}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2b_1-1}{b_1} a_1 + \left(1 - \frac{2b_1-1}{b_1}\right) a$$

$$a_1 = (2b_1-1)a_1 + (1-b_1)a$$

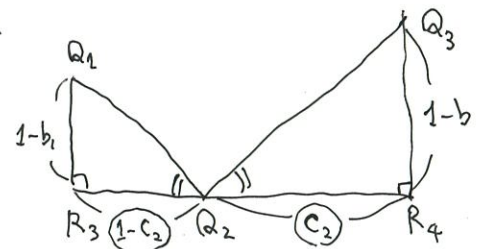
$$\therefore (1-b_1)(-2a_1 + a) = 0$$

$$b_1 = 1 \text{ とすると } Q_1 \text{ と } Q_2 \text{ が一致して不適より } 1-b_1 \neq 0$$

$$\therefore a_1 = \frac{a}{2} \quad (\text{答}) \leftarrow (\text{き})$$

$$\text{また、} Q_1R_3 : Q_3R_4 = R_3Q_2 : Q_2R_4 \text{ より } (1-b_1) : (1-b) = (1-c_2) : c_2$$

$$(1-b_1)c_2 = (1-b)(1-c_2) \quad \text{ここに } c_2 = \frac{2b_1-1}{b_1} \text{ を代入して}$$



$$(1-b_1) \frac{2b_1-1}{b_1} = (1-b) \left(1 - \frac{2b_1-1}{b_1}\right)$$

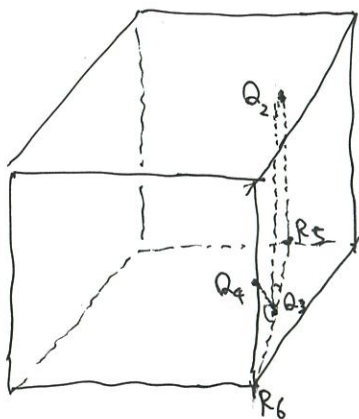
$$(1-b_1)(2b_1-1) = (1-b)(1-b_1)$$

$$\therefore 1-b_1 \neq 0 \text{ より } 2b_1-1 = 1-b \quad \therefore b_1 = \frac{2-b}{2} \quad (\text{答}) \leftarrow (k)$$

$$\text{このとき, } a_2 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{2-b}{2}} = \frac{a}{2-b} \quad \therefore a_2 = \frac{a}{2-b} \quad (\text{答}) \leftarrow (H)$$

$$\text{また, } c_2 = \frac{2b_1-1}{b_1} = \frac{2 \cdot \frac{2-b}{2} - 1}{\frac{2-b}{2}} = \frac{2(1-b)}{2-b} \quad \therefore c_2 = \frac{2(1-b)}{2-b} \quad (\text{答}) \leftarrow (=)$$

$a_4=1, b_4=0$ となるとき.



$$Q_2(a_2, 1, c_2), Q_3(a, b, 0), Q_4(1, 0, c_2)$$

$$R_5(a_2, 1, 0)$$

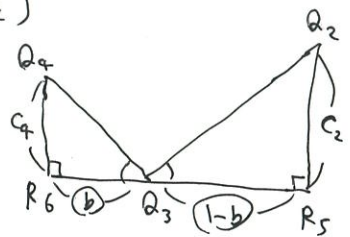
$$R_6(1, 0, 0)$$

R_5, Q_3, R_6 が一直線上にあることより

$$\overrightarrow{OQ_3} = (1-t)\overrightarrow{OR_5} + t\overrightarrow{OR_6} \quad (t: \text{実数})$$

$$(a, b, 0) = (1-t)(a_2, 1, 0) + t(1, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a = (1-t)a_2 + t \\ b = 1-t \end{cases}$$



$$\therefore a = b a_2 + 1-b \text{ となるから. この } a_2 = \frac{a}{2-b} \text{ を代入すると}$$

$$a = b \cdot \frac{a}{2-b} + 1-b \quad \therefore \frac{2(1-b)}{2-b} a = 1-b$$

$$1-b \neq 0 \text{ より } 2a = 2-b \quad \therefore b = 2(1-a) \quad (\text{答}) \leftarrow (L)$$

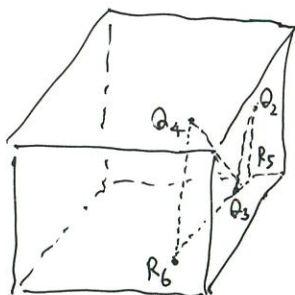
$$Q_4R_6:Q_2R_5=Q_3R_6:Q_3R_5 \text{ より } c_4:c_2=b:(1-b)$$

$$\therefore c_4 = \frac{b}{1-b} \cdot c_2 = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{2(1-b)}{2-b} = \frac{2b}{2-b}$$

$$\text{このとき, } c_4 \leq 1 \text{ より } \frac{2b}{2-b} \leq 1 \quad \therefore b \leq \frac{2}{3}$$

$$b = 2(1-a) \text{ より } 2(1-a) \leq \frac{2}{3} \quad \therefore \frac{2}{3} \leq a \quad \therefore \frac{2}{3} \leq a < 1 \quad (\text{答}) \leftarrow (I)$$

また, 点 Q_4 が $\overline{R_6R_5}$ 上にあるとき.

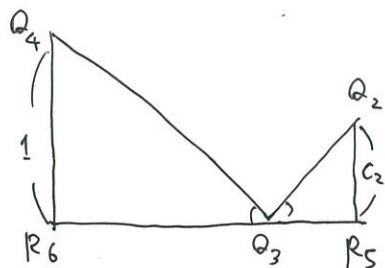


$$Q_2(a_2, 1, c_2), Q_3(a, b, 0), Q_4(a_4, b_4, 1)$$

$$R_5(a_2, 1, 0)$$

$$R_6(a_4, b_4, 0)$$

R_5, Q_3, R_6 が一直線上にあることより.



$$\begin{cases} 1 : c_2 = (x_{Q_3} - x_{R_6}) : (x_{R_5} - x_{Q_3}) \\ 1 : c_2 = (y_{Q_3} - y_{R_6}) : (y_{R_5} - y_{Q_3}) \end{cases} \quad \text{よって}$$

$$\begin{cases} 1 : c_2 = (a - a_4) : (a_2 - a) \\ 1 : c_2 = (b - b_4) : (1 - b) \end{cases}$$

よって、
$$a - a_4 = \frac{a_2 - a}{c_2} = \frac{\frac{a}{2-b} - a}{\frac{2(1-b)}{2-b}} = \frac{a - a(2-b)}{2(1-b)} = \frac{a(b-1)}{2(1-b)} = -\frac{a}{2}$$

$$\therefore a_4 = \frac{3}{2}a \quad \because a_4 \leq 1 \quad \therefore a \leq \frac{2}{3}$$

また、
$$b - b_4 = \frac{1-b}{c_2} = \frac{1-b}{\frac{2(1-b)}{2-b}} = \frac{2-b}{2}$$

$$\therefore b_4 = \frac{3b-2}{2} \quad \because b_4 \geq 0 \quad \therefore b \geq \frac{2}{3}$$

したがって、 $0 < a \leq \frac{2}{3}$ から $\frac{2}{3} \leq b < 1$ である。

$$(a_4, b_4, c_4) = \left(\frac{3}{2}a, \frac{3b-2}{2}, 1 \right) \quad \left(\frac{4}{6} \right) \leftarrow (c)(z)$$