

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

東京慈恵会医科大学 数学

試験日2月11日(火)



1. 事象 A, B を

A: 積 $X_1 X_2 X_3$ が 2 の倍数にならない.

B: 積 $X_1 X_2 X_3$ が 5 の倍数にならない.

と定めると,

$$P(A) = (X_1, X_2, X_3 \text{ がすべて } 1, 3, 5 \text{ のいずれかとなる確率}) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = (X_1, X_2, X_3 \text{ がすべて } 1, 2, 3, 4, 6 \text{ のいずれかとなる確率}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(A \cap B) = (X_1, X_2, X_3 \text{ がすべて } 1, 3 \text{ のいずれかとなる確率}) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

このとき, 積 $X_1 X_2 X_3$ が 10 の倍数になる確率は,

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{125}{216} - \frac{1}{27}\right) = 1 - \frac{27 + 125 - 8}{216} = 1 - \frac{144}{216} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{45}{6}\right) \end{aligned}$$

事象 C, D, E を

C: 和 $X_1 + X_2$ が 6 の倍数となる.

D: 和 $X_2 + X_3$ が 6 の倍数となる.

E: 和 $X_3 + X_1$ が 6 の倍数となる.

と定めると,

$X_1 + X_2$ が 6 の倍数となる場合は,

$$(X_1, X_2) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)$$

$$\text{の } 6 \text{ 通りより } P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{同様に } P(D) = P(E) = \frac{1}{6}$$

$X_1 + X_2$ と $X_2 + X_3$ がともに 6 の倍数となる場合は,

$$(X_1, X_2, X_3) = (1, 5, 1), (2, 4, 2), (3, 3, 3), (4, 2, 4), (5, 1, 5), (6, 6, 6)$$

$$\text{の } 6 \text{ 通りより } P(C \cap D) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \quad \text{同様に } P(D \cap E) = P(E \cap C) = \frac{1}{36}$$

$X_1 + X_2$ と $X_2 + X_3$ と $X_3 + X_1$ がともに 6 の倍数となる場合は,

$$(X_1, X_2, X_3) = (3, 3, 3), (6, 6, 6)$$

$$\text{の } 2 \text{ 通りより } P(C \cap D \cap E) = \frac{2}{216} = \frac{1}{108}$$

このとき、 $X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_1$ が、いずれも 6 の倍数にならない確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E}) &= P(\overline{C \cup D \cup E}) = 1 - P(C \cup D \cup E) \\ &= 1 - \{P(C) + P(D) + P(E) - P(C \cap D) - P(D \cap E) - P(E \cap C) + P(C \cap D \cap E)\} \\ &= 1 - \left(3 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{1}{36} + \frac{1}{108}\right) = 1 - \frac{54 - 9 + 1}{108} = 1 - \frac{46}{108} = \frac{31}{54} \quad \left(\frac{31}{54}\right) \end{aligned}$$

2. (1) 関数 $y = \log x$ は単調増加するので、 $0 \leq x \leq 1$ のとき $n \leq x+n \leq n+1$ より

$$(0 <) \log n \leq \log(x+n) \leq \log(n+1) \text{ となり, } \frac{x}{\log(n+1)} \leq \frac{x}{\log(x+n)} \leq \frac{x}{\log n} \text{ を得る.}$$

これを区間 $[0, 1]$ で定積分し $(2. \int_0^1 \frac{x}{\log(n+1)} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\log n} dx \text{ となり,}$

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{2 \log(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{2 \log n} \text{ が成り立つ. (証明終)}$$

$$(2) \int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int (\log x)^{-2} (\log x)' dx = \frac{(\log x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(3) (1) \text{ より } \frac{1}{2 \log(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{2 \log n} \text{ であるから, 各辺に } \frac{2}{n \log n} \text{ を掛けると}$$

$$\frac{1}{n \log n \log(n+1)} \leq \frac{2}{n \log n} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} dx \leq \frac{1}{n (\log n)^2} \text{ を得る.}$$

$$\text{よって, } \sum_{k=n}^m \frac{1}{k \log k \log(k+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k (\log k)^2} \quad \text{①}$$

ここで、正の整数 k に対して、区間 $k \leq x \leq k+1$ において、 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は単調減少より

$$\frac{1}{(k+1) \{\log(k+1)\}^2} \leq \frac{1}{x(\log x)^2} \leq \frac{1}{k (\log k)^2}$$

これを区間 $[k, k+1]$ で定積分し $(2. \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1) \{\log(k+1)\}^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\log x)^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k (\log k)^2} dx$

$$\therefore \frac{1}{(k+1) \{\log(k+1)\}^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\log x)^2} dx \leq \frac{1}{k (\log k)^2} \quad \text{③}$$

ここで、不等式③を $k=n-1$ から $k=m-1$ まで加えると

$$\sum_{k=n-1}^{m-1} \frac{1}{(k+1) \{\log(k+1)\}^2} \leq \sum_{k=n-1}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

$$\therefore \sum_{k=n}^m \frac{1}{k (\log k)^2} \leq \int_{n-1}^m \frac{1}{x(\log x)^2} dx \quad \text{--- ④}$$

$$\therefore \int_{n-1}^m \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{n-1}^m = -\frac{1}{\log m} + \frac{1}{\log(n-1)} = \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

よって、④ とおける。

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k(\log k)^2} \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

よって、② より

$$\sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \leq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m} \quad \text{が成立する。}$$

一方で、① については、正の整数 k に対し、

$$\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \leq \frac{1}{k \log k \log(k+1)}$$

が成り立つことを示す。

$f(x) = x - \log(1+x)$ とおくと、 $x > 0$ において

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \text{より } f(x) \text{ は単調増加するので、}$$

$$x > 0 \text{ で } f(x) \geq f(0) = 0 \quad \text{である。}$$

$$\text{よって } x = \frac{1}{k} \text{ を代入すると}$$

$$\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq 0 \quad \text{より } \log \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}$$

$$\therefore \log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k}$$

この両辺を $\log k \log(k+1)$ で割ると、

$$\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \leq \frac{1}{k \log k \log(k+1)}$$

が成り立つことが示された。

これを $k=n$ から $k=m$ まで合計すると、

$$\sum_{k=n}^m \left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \right) \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k \log k \log(k+1)}$$

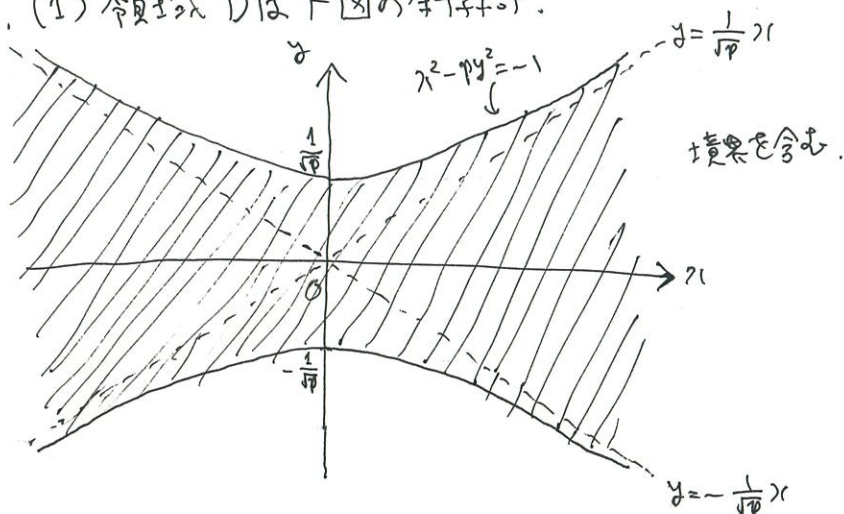
$$\therefore \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k \log k \log(k+1)}$$

よって、① より

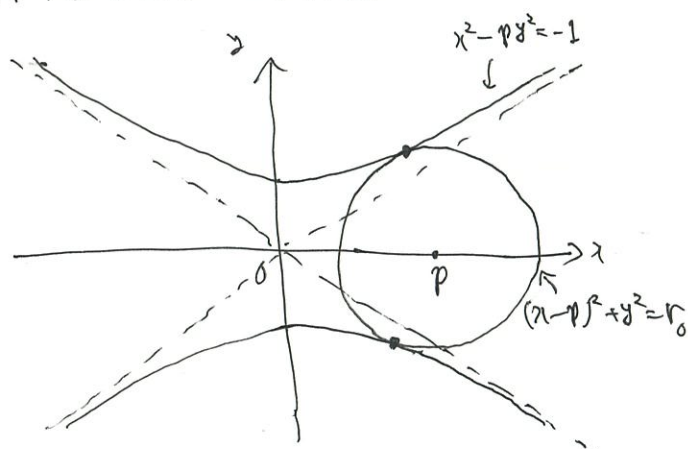
$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leq \sum_{k=n}^m \frac{2}{k \log k} \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)} dx \quad \text{が成立する。}$$

(証明終)

3. (1) 領域 D は下図の斜線部.



まず, 正の実数 r で, $\{(x-p)^2 + y^2 = r\}$ が D に含まれるような最大の値を求め,
その r の値を r_0 とすると, それは $\{(x-p)^2 + y^2 = r_0\}$ が双曲線 $x^2 - py^2 = -1$ に
接するときである, (下図)



この2曲線の共有点の x 座標が
満たす方程式は,

$$x^2 - p\{r_0 - (x-p)^2\} = -1$$

$$\therefore (p+1)x^2 - 2p^2x + p^3 - pr_0 + 1 = 0$$

$p+1 > 0$ より 2次方程式であるので,
判別式を D とする.

接するのは, この2次方程式が
重解をもつときより $D=0$ である.

$$D/4 = p^4 - (p+1)(p^3 - pr_0 + 1) = (p^2 + p)r_0 - p^3 - p - 1 = 0$$

$$\therefore r_0 = \frac{p^3 + p - 1}{p^2 + p} = p - 1 + \frac{2p+1}{p^2+p}$$

ここで, $p \geq 2$ のとき $(p^2 + p) - (2p+1) = p^2 - p - 1 = (p - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ は単調増加
するので, $p^2 - p - 1 \geq 2^2 - 2 - 1 = 1 > 0$ より $p^2 + p > 2p+1$ が成り立つ
よって, $0 < \frac{2p+1}{p^2+p} < 1$ であるから, r_0 を超えない最大の整数は $p-1$ である.

このとき, $\{(x-p)^2 + y^2 = r\}$ が領域 D に含まれる条件は $r \leq r_0$ であり,

これを満たす r のうち最大の自然数をとればよいので, $r = p-1$ (答)

(2) $y = p - 1$ より

$$(x-p)^2 + y^2 = p - 1$$

ここで、 $y \geq 2$ であるから $p - 1 = (x-p)^2 + y^2 \geq 4$ より $p \geq 5$

よって、 p は奇数の素数である。

$x = 2$ とすると、 $(2-p)^2 + y^2 = p - 1$ より $p^2 - 5p + y^2 + 1 = 0$ となり、

p の2次方程式を見たときの判別式を D とすると、

$$D = 25 - 4(y^2 + 1) = 21 - 4y^2 \geq 0 \quad \therefore y^2 \leq \frac{21}{4} = 5.25$$

ここで、 y は素数より $y = 2$ と定まり、 $p^2 - 5p + 5 = 0$ となるが、

これを満たす p は素数ではないから不適。

よって、 x は3以上の奇数の素数である。

このとき、 $y^2 = p - 1 - (x-p)^2$ (において p は奇数、 x は奇数より)

$x-p$ は偶数であるから $p - 1 - (x-p)^2$ は偶数となる。

よって、 y は偶数であるわけではなく、偶数の素数は2のみより $y = 2$ と定まる。

すると、 $(x-p)^2 = p - 5$ より $p = (x-p)^2 + 5$ となり、 $x-p$ が偶数で

あることに注意して小さい方から値を調べていくと、

$$2^2 + 5 = 9 \quad \text{合成数}$$

$$4^2 + 5 = 21 \quad \text{合成数}$$

$$6^2 + 5 = 41 \quad \text{素数} \quad \text{そこで、この場合に } x \text{ が素数になるか調べる。}$$

$$\text{ここで、} x-p = \pm 6, p = 41 \text{ とすると、}$$

$$x = 35, 47 \text{ となるが、} x \text{ は素数より } x = 47$$

以上より、 p の値が最小となる (x, y, p) の組は

$$(x, y, p) = (47, 2, 41) \quad (\text{答})$$

4. $z + \frac{1}{z-1}$ が実数になる条件より

$$\overline{z + \frac{1}{z-1}} = z + \frac{1}{z-1}$$

$$\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}-1} = z + \frac{1}{z-1}$$

$$z - \overline{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{\overline{z}-1} = 0$$

$$z - \overline{z} + \frac{\overline{z} - z}{(z-1)(\overline{z}-1)} = 0$$

$$(z - \overline{z}) \left(1 - \frac{1}{(z-1)(\overline{z}-1)} \right) = 0$$

ここで、 z は実数でない複素数より $z - \overline{z} \neq 0$ であるから、

$$1 - \frac{1}{(z-1)(\overline{z}-1)} = 0$$

$$\therefore |z-1| = 1$$

よって、 $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ とおくことができる。

$$z + \frac{1}{z-1} = 1 + \cos \theta + i \sin \theta + \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = 1 + \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\therefore z + \frac{1}{z-1} = 1 + 2 \cos \theta$$

$$\text{よって、} z + \frac{1}{z-1} \text{ が正の実数より } 1 + 2 \cos \theta > 0 \quad \therefore \cos \theta > -\frac{1}{2}$$

$$\text{このとき、} \frac{1}{z-1} - \frac{z-\overline{z}}{2} + 1 = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} - \frac{(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta)}{2} + 1$$

$$= \cos \theta - i \sin \theta - i \sin \theta + 1 = 1 + \cos \theta - 2i \sin \theta$$

$$\text{よって、} \left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\overline{z}}{2} + 1 \right| = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + 4(1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{-3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 5}$$

$$\text{ここで、} x = \cos \theta \text{ とおくとき、} -\frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ のとき、} f(x) = \sqrt{-3x^2 + 2x + 5}$$

のとり得る値の範囲を求めればよい。

$$f(x) = \sqrt{-3x^2 + 2x + 5} = \sqrt{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}} \quad \left(-\frac{1}{2} < x \leq 1\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-\frac{3}{4} - 1 + 5} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

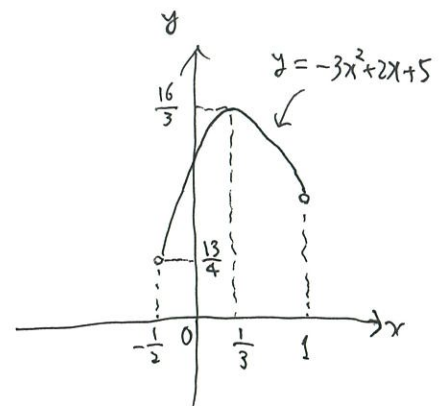
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(1)$$

$$f(1) = \sqrt{-3 + 2 + 5} = 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

よって、 $f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{13}}{2} < f(x) \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



したがって、

$$\frac{\sqrt{13}}{2} < \left| \frac{1}{z-1} - \frac{z-\bar{z}}{2} + 1 \right| \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$