

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

日本医科大学（後期） 数学

試験日 2月28日（金）



[I] 白球をW, 黒球をBで表すとする。また、直前に同じ色の球が入っている場合を○で表すとする。

上から順に箱1, 箱2, 箱3に入っている球の色を並べて表すとする。

例えば, $\begin{matrix} W \\ B \\ W \end{matrix}$ は 箱1に白球, 箱2に黒球, 箱3に白球が入っている状態を表す。

さいに3で出た目を①②③④⑤⑥で表すとする。

①の直後は $\begin{matrix} B \\ O \\ O \end{matrix}$, ②の直後は $\begin{matrix} O \\ B \\ O \end{matrix}$, ③の直後は $\begin{matrix} O \\ O \\ B \end{matrix}$,

④⑤の直後は $\begin{matrix} W \\ W \\ W \end{matrix}$, ⑥の直後は $\begin{matrix} B \\ B \\ B \end{matrix}$ となる。

問1. 3回後が $\begin{matrix} W \\ W \\ W \end{matrix}$ となるのは 3回目に④または⑤が出た場合であり,

1回目, 2回目はどの目が出てもいいので, 求める確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (答)

問2. 3回後が $\begin{matrix} B \\ B \\ W \end{matrix}$ となるのは, 3回に出る目が, ①②③の並べかえ

①①②の並べかえ 1回目が④または⑤で 2, 3回目は①②の並べかえ,

のいずれかとなる場合であり,

$$\frac{3!}{2!} \times 2 + 2 \times 2! = 10 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は, $\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$ (答)

問3. 3回後が $\begin{matrix} B \\ W \\ W \end{matrix}$ となるのは, ①が3回続く, 1回目が④または⑤で 2, 3回目に

①が2回続く, 1回目が①~⑥のいずれかで 2回目が④または⑤で 3回目に①が出る,

のいずれかとなる場合であり,

$$1 + 2 + 6 \times 2 = 15 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は, $\frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$ (答)

問4. 3回後に箱1にBが入っている事象をE, 箱3にWが入っている事象をFとする。

$P(E \cap F)$ は、3回後が $\begin{smallmatrix} B \\ B \\ W \end{smallmatrix}$ または $\begin{smallmatrix} B \\ W \\ W \end{smallmatrix}$ となる場合なので、問2, 3より

$$P(E \cap F) = \frac{5}{108} + \frac{5}{72} = \frac{25}{216}$$

$P(E)$ は、3回後が $\begin{smallmatrix} B \\ B \\ W \end{smallmatrix}$ または $\begin{smallmatrix} B \\ W \\ W \end{smallmatrix}$ または $\begin{smallmatrix} B \\ W \\ B \end{smallmatrix}$ または $\begin{smallmatrix} B \\ B \\ B \end{smallmatrix}$ となる場合であり

$\begin{smallmatrix} B \\ W \\ B \end{smallmatrix}$ となる場合は問2と同じ確率 $\frac{5}{108}$ である。

$\begin{smallmatrix} B \\ B \\ B \end{smallmatrix}$ となる場合は、1, 2回目は何が出てもよく3回目に⑥が出る。

1回目は何でもよく2回目に⑥が出ると3回目は①または②または③が出る。

1回目に⑥が出て、2, 3回目は①または②または③が出る。

①②③の並べかえ、のいずれかである場合であり、

$$6^2 + 6 \times 3 + 3^2 + 3! = 36 + 18 + 9 + 6 = 69 \text{通り}$$

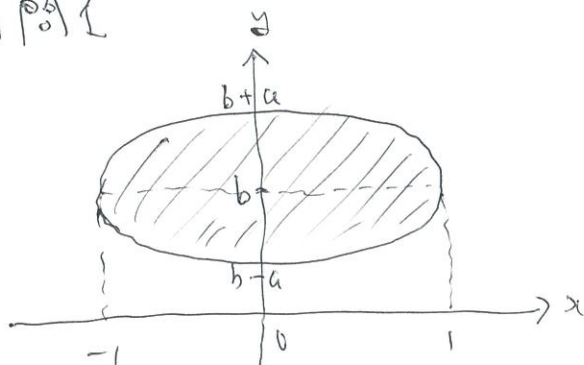
$$\text{よって、} \begin{smallmatrix} B \\ B \\ B \end{smallmatrix} \text{ となる確率は } \frac{69}{6^3} = \frac{23}{108}$$

$$\text{これより、} P(E) = \frac{5}{108} + \frac{5}{72} + \frac{5}{108} + \frac{23}{108} = \frac{104}{216}$$

よって、求める条件付き確率は、

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{25}{104} \quad (\text{答})$$

[Ⅱ] 問1



$$x^2 + \frac{(y-b)^2}{a^2} \leq 1 \quad \text{より}$$

$$b - a\sqrt{1-x^2} \leq y \leq b + a\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \left\{ \pi (b + a\sqrt{1-x^2})^2 - \pi (b - a\sqrt{1-x^2})^2 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 4\pi ab \sqrt{1-x^2} dx = 4\pi ab \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx}_{\text{半径1の半円の面積}} \\ &= 4\pi ab \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 2\pi^2 ab \quad \left(\frac{6}{5} \right) \end{aligned}$$

問2. $W_{n,j}(a) = 2\pi^2 a^{n-1} \left(1 + \frac{2j-1}{2^{n-1}} \right)$

$$\begin{aligned} X_n(a) &= \sum_{j=1}^{2^{n-1}} W_{n,j}(a) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} 2\pi^2 a^{n-1} \left(1 + \frac{2j-1}{2^{n-1}} \right) \\ &= 2\pi^2 a^{n-1} \cdot \left\{ 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (2^{n-1})^2 \right\} \quad \left(\because \sum_{j=1}^N (2j-1) = N^2 \right) \\ &= 2\pi^2 a^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 2^{n-1}) = 4\pi^2 (2a)^{n-1} \quad \left(\frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

問3. 部分和を. $S_N = \sum_{n=1}^N n X_n(a)$ とおく.

$a = \frac{1}{2}$ のとき. $S_N = \sum_{n=1}^N 4\pi^2 n = 4\pi^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ より $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \infty$

$a \neq \frac{1}{2}$ のとき. $S_N = \sum_{n=1}^N n \cdot 4\pi^2 (2a)^{n-1} = 4\pi^2 \sum_{n=1}^N n (2a)^{n-1}$

$$S_N = 4\pi^2 \{ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (2a) + 3 \cdot (2a)^2 + \dots + N(2a)^{N-1} \}$$

$$\rightarrow 2a S_N = 4\pi^2 \{ 1 \cdot (2a) + 2 \cdot (2a)^2 + \dots + (N-1)(2a)^{N-1} + N(2a)^N \}$$

$$(1-2a) S_N = 4\pi^2 \{ 1 + 2a + (2a)^2 + \dots + (2a)^{N-1} - N(2a)^N \}$$

$$= 4\pi^2 \left\{ \frac{1-(2a)^N}{1-2a} - N(2a)^N \right\}$$

$$\therefore S_N = 4\pi^2 \left\{ \frac{1-(2a)^N}{(1-2a)^2} - \frac{N(2a)^N}{1-2a} \right\}$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき $0 < 2a < 1$ より, $\lim_{N \rightarrow \infty} (2a)^N = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N(2a)^N = 0$ であり

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{4\pi^2}{(1-2a)^2}$$

$\frac{1}{2} < a < 1$ のとき, $2a > 1$ であり

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} 4\pi^2 \cdot \frac{\{(2a-1)N-1\}(2a)^N + 1}{(1-2a)^2} = \infty$$

以上より, $\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a)$ が収束するための必要十分条件は $0 < a < \frac{1}{2}$ (答)

そのときの和は $\frac{4\pi^2}{(1-2a)^2}$ (答)

[Ⅳ] 問 1. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -\sin \theta \end{cases}$ のとき $\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{2} \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = -\cos \theta \end{cases}$

よって, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\cos \theta}{-\sqrt{2} \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \tan \theta}$

よって, 法線 L_θ の傾きは $-\sqrt{2} \tan \theta$ とおきのとき, L_θ の方程式は,

$$y = (-\sqrt{2} \tan \theta)(x - \sqrt{2} \cos \theta) - \sin \theta$$

$$\therefore y = (-\sqrt{2} \tan \theta)x + \sin \theta \quad \left(\frac{25}{5}\right)$$

問 2. $f(\theta) = -k \tan \theta + \sin \theta$

$$f'(\theta) = -k \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} + \cos \theta = \frac{\cos^3 \theta - k}{\cos^2 \theta}$$

よって, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $f'(\theta) = 0$ とおきの θ の値がただ1つ存在し

その角を α とおくと, $\cos^3 \alpha = k$ より $\cos \alpha = k^{\frac{1}{3}}$

θ	(0)	---	α	---	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗		↘	

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = -\infty$$

$$f(\alpha) = -k \tan \alpha + \sin \alpha = -k \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha$$

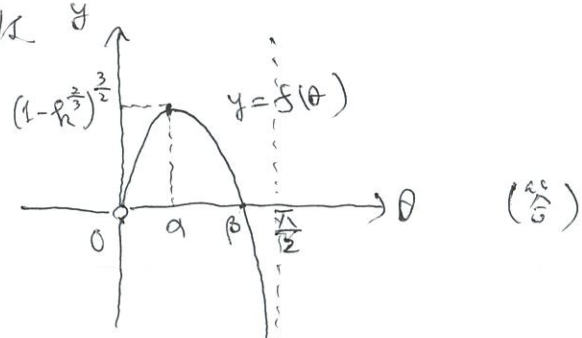
$$= \left(1 - \frac{k}{\cos \alpha}\right) \sin \alpha = \left(1 - \frac{k}{k^{\frac{1}{3}}}\right) \sqrt{1 - (k^{\frac{1}{3}})^2} = (1 - k^{\frac{2}{3}}) \sqrt{1 - k^{\frac{2}{3}}}$$

$$= (1 - k^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad \left(\frac{25}{5}\right)$$

$$f(\beta) = 0 \text{ のとき } -k \tan \beta + \sin \beta = 0 \text{ より } \sin \beta \left(-\frac{k}{\cos \beta} + 1\right) = 0$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \beta \neq 0 \text{ より } \cos \beta = k \text{ かつ } k < k^{\frac{1}{3}} \text{ より } \beta > \alpha$$

よって, $y = f(\theta)$ のグラフの概形は



問3, x を $0 < x \leq \frac{1}{4}$ の範囲に固定して, θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させたときの, θ の関数 $y = -\sqrt{2}x \tan \theta + \sin \theta$ の値域を求めよ。

問2で $k = \sqrt{2}x$ とした場合を考えて, ($0 < \sqrt{2}x \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$ に注意)

求める値域は, $y \leq \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}$ である。

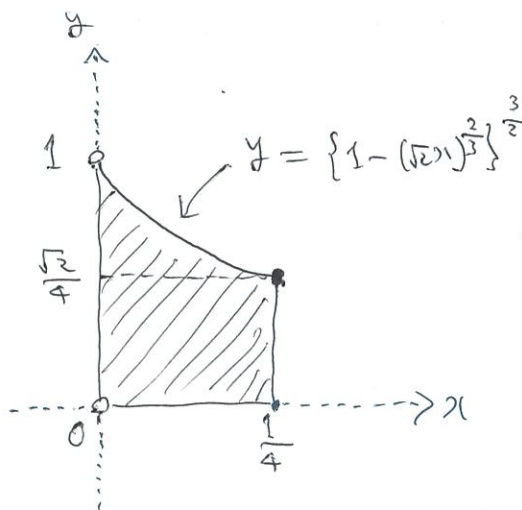
よって, $0 \leq y$ と合わせて, $0 \leq y \leq \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}$

または, $x = 0$ のとき $y = \sin \theta$ となるので, θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させたときの値域は $0 < y < 1$ である。

よって,

$$D = \begin{cases} x = 0 \text{ のとき } 0 < y < 1 \\ 0 < x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき } 0 \leq y \leq \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

ここで, $x = \frac{1}{4}$ のとき $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ となるので, D の概形を図



境界は, 0 は含まず, 他は含む。

(45)

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos^2 t \sin t \\ \frac{dy}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t \end{cases} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\sqrt{2} \tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos^2 t \sin t} = \frac{2}{3 \cos^4 t \sin t} > 0$$

よって, $y = \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}$ は $0 < x \leq \frac{1}{4}$ で下に凸である。

問 4. $y = \{1 - (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}$ より $(\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \text{ とおくと } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \text{ とおくと.}$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{1}{4} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos^2 t \cdot \sin t$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{4}} y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} y \frac{dx}{dt} dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t \cdot \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos^2 t \cdot \sin t\right) dt \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \end{aligned}$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \text{ とおく.}$$

$$I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \cdot (-\cos t)' dt \\ &= \left[\sin^{n+1} t \cdot (-\cos t) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n t \cdot \cos t \cdot (-\cos t) dt \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} + (n+1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} + (n+1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n t - \sin^{n+2} t) dt \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} + (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

$$\therefore (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}$$

$$\therefore I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n + \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{5}{6} \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5\pi}{64} + \frac{11}{48}$$

よ、2. 求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{3\sqrt{2}}{2} (I_4 - I_6) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \frac{5\pi}{64} - \frac{11}{48} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}\pi}{128} + \frac{\sqrt{2}}{32} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[IV] 問 1. $|z|=1$ であり, z の虚部 $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ が正より,

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおくことができる.

$$|z+1|^2 = |1 + \cos \theta + i \sin \theta|^2 = (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 + \cos \theta)$$

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 + 2i \sin \theta \cos \theta$$

このとき

$$W_n = \frac{z^{4n} + |z+1|^2 z^{4n+1} + z^{4n+2}}{3} = \frac{(1 + |z+1|^2 z + z^2) z^{4n}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \{ 1 + 2(1 + \cos \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) + 2\cos^2 \theta - 1 + 2i \sin \theta \cos \theta \} z^{4n}$$

$$= \frac{1}{3} \{ 2\cos \theta (1 + \cos \theta) + 2\sin \theta (1 + \cos \theta) i \} (\cos \theta + i \sin \theta)^{4n}$$

$$= \frac{2}{3} (1 + \cos \theta) (\cos \theta + i \sin \theta)^{4n+1}$$

$$= \frac{2}{3} (1 + \cos \theta) \{ \cos(4n+1)\theta + i \sin(4n+1)\theta \}$$

ここで, $W_n + \overline{W_n} = 0$ より (W_n の実部) $= 0$

$$\frac{W_n - \overline{W_n}}{2i} > \frac{2}{3} \text{ より } (W_n \text{ の虚部}) > \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \cos \theta) \cos(4n+1)\theta = 0 \\ \frac{2}{3}(1 + \cos \theta) \sin(4n+1)\theta > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (1 + \cos \theta) \cos(4n+1)\theta = 0 & \text{--- (1)} \\ (1 + \cos \theta) \sin(4n+1)\theta > 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

(2) より $1 + \cos \theta \neq 0$ であり, (1) より $\cos(4n+1)\theta = 0$

$$\therefore (4n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m: \text{整数})$$

$$\therefore \theta = \frac{(2m+1)\pi}{2(4n+1)}$$

$$\text{このとき } \sin(4n+1)\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m$$

よって, (2) は m が偶数のとき $1 + \cos \theta > 1$ より $\cos \theta > 0 \therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

m が奇数のとき $-1 - \cos \theta > 1$ より $\cos \theta < -1$ となり不適.

よ、 m は偶数でなければならぬので、 $m = 2k - 2$ (k : 正の整数)

よって

$$\theta = \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} \quad (2-), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } 1 \leq k \leq n$$

よ、 $N_n = n \left(\frac{2}{3} \right)$

$$\theta_{n,k} = \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} \quad (2-)$$

$$\begin{aligned} \text{問 2. } (z_{n,k})^{4n+1} &= \left(\cos \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} + i \sin \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} \right)^{4n+1} \\ &= \cos \frac{(4k-3)\pi}{2} + i \sin \frac{(4k-3)\pi}{2} \\ &= \cos \left(-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \\ &= i \left(\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{問 3. } \frac{k}{2N_n} \pi - \theta_{n,k} = \frac{k}{2n} \pi - \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} = \frac{(3n+k)\pi}{2n(4n+1)} \geq 0$$

$$\theta_{n,k} - \frac{k-1}{2N_n} \pi = \frac{(4k-3)\pi}{2(4n+1)} - \frac{k-1}{2n} \pi = \frac{n-k+1}{2n(4n+1)} \geq 0$$

$$\text{よ、} \frac{k-1}{2N_n} \pi \leq \theta_{n,k} \leq \frac{k}{2N_n} \pi \text{ が成立する。 (証明終)} \quad (2-)$$

$$\begin{aligned} \text{問 4. } w_{n,k} &= \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \theta_{n,k}) (\cos \theta_{n,k} + i \sin \theta_{n,k})^{4n+1} \\ &= \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \theta_{n,k}) \cdot i \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{w_{n,k}}{i} = \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \theta_{n,k})$$

よ、問 3 の結果より

$$\frac{2}{3} (1 + 2 \cos \frac{k\pi}{2n}) \leq \frac{w_{n,k}}{i} \leq \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{2n})$$

$$\therefore \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \frac{k\pi}{2n}) \leq \frac{1}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} \frac{w_{n,k}}{i} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} (1 + 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{2n})$$

$$\begin{aligned} \text{222. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) \right\} &= \int_0^1 \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right\} dx \\ &= \frac{2}{3} \left(x + \frac{4}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k-1}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) \right\} = \int_0^1 \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right\} dx \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \end{aligned}$$

よるの2. はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} \frac{w_{n,k}}{i} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \quad (\text{答})$$