

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

埼玉医科大学（後期） 数学

試験日 3月1日（土）



$$\begin{aligned} \text{[I]} \quad f(x) &= a(x-a)^2 - a \\ g(x) &= -a(x+a)^2 + a \quad (0 < a < 1) \end{aligned}$$

問1 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ を連立すると、

$$a(x-a)^2 - a = -a(x+a)^2 + a$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 - 1 = -(x+a)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a^2) + (x^2 + 2ax + a^2) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2a^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1-a^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{よって, } y &= a(\pm \sqrt{1-a^2} - a)^2 - a \\ &= a(1 - a^2 \mp 2a\sqrt{1-a^2} + a^2) - a \\ &= \mp 2a^2\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点は、

$$\underline{(x, y) = \pm \sqrt{1-a^2} (1, -2a^2)} \quad \Delta$$

問2 $f(x) = g(x)$ の解を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とする。

$$(\alpha = -\sqrt{1-a^2}, \beta = \sqrt{1-a^2})$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2a(x-\alpha)(x-\beta)\} dx \\ &= -2a \times \left\{ -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3} a (2\sqrt{1-a^2})^3 \\ &= \frac{8}{3} a \sqrt{(1-a^2)^3} \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{a^2(1-a^2)^3} \end{aligned}$$

$$(a^2 = A \text{ とする})$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{A(1-A)^3} \quad (0 < A < 1)$$

$$f(A) = A(1-A)^3 \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} f'(A) &= (1-A)^3 + A \cdot 3(1-A)^2 \cdot (-1) \\ &= (1-A)^2 \{ (1-A) - 3A \} \\ &= (1-A)^2 (1-4A) \end{aligned}$$

A	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1
$f'(A)$	\	+	0	-	\
$f(A)$	\	↗	最大	↘	\

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$$

したがって、

$$\underline{a = \frac{1}{2}} \quad \text{のとき} \quad S = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{27}{256}} = \frac{8}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{16} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \quad (\text{最大値})$$

問1 $P: z = \cos(2\phi) + i\sin(2\phi) \quad (0 < \phi < \pi)$

$Q: |z| = 1$

$P \rightarrow Q$ は真 $Q \rightarrow P$ は偽 (反例は $z = 1$)

したがって、 P は Q であるための 十分条件だが、必要条件でない。

問2 $P: \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$

$Q: |z| = 1$

$P \leftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$

$\leftrightarrow |z-i| = |z+i| \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow (z-i)(\overline{z-i}) = (z+i)(\overline{z+i}) \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow (z-i)(\overline{z}+i) = (z+i)(\overline{z}-i) \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow 2iz = 2i\overline{z} \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow \overline{z} = z \quad (z \neq -i)$

$\leftrightarrow z$ は実数

$P \rightarrow Q$ は偽 $Q \rightarrow P$ は偽

したがって、 P は Q であるための 必要条件でも十分条件でもない。

問 3 $P: \left| \frac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}} \right| = 1$

$Q: |z| = 1$

$P \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}z-1}{z-\sqrt{2}} \right| = 1$

$\Leftrightarrow |\sqrt{2}z-1| = |z-\sqrt{2}| \quad (z \neq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}z-1)(\sqrt{2}\bar{z}-1) = (z-\sqrt{2})(\bar{z}-\sqrt{2}) \quad (z \neq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + 1 = z\bar{z} - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + 2 \quad (z \neq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \quad (z \neq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \quad (z \neq \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow |z| = 1$

$\Leftrightarrow Q$

P と Q は同値であるため,

P は Q であるための 必要十分条件 である。

$$\boxed{3} \quad \vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{OP} = (\cos \theta) \vec{a} + (\sin \theta) \vec{b} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$\begin{aligned} \text{問 1} \quad |\vec{OP}|^2 &= |(\cos \theta) \vec{a} + (\sin \theta) \vec{b}|^2 \\ &= (\cos^2 \theta) |\vec{a}|^2 + (2 \sin \theta \cos \theta) \vec{a} \cdot \vec{b} + (\sin^2 \theta) |\vec{b}|^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

$$\text{問 2} \quad \vec{OP} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

P が xy 平面上にありとき、

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \theta \neq \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

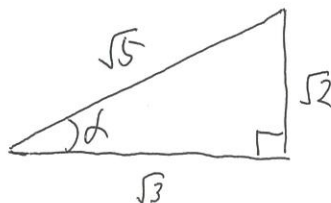
$$\text{問 3} \quad \vec{OP}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, 0 \right)$$

$$\vec{PP}' = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)$$

$$|\vec{PP}'| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{3} \sin \theta - \sqrt{2} \cos \theta) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{5} \sin(\theta - \alpha) \right|$$



$$= \left| \frac{\sqrt{30}}{6} \sin(\theta - \alpha) \right| \quad (-\alpha \leq \theta < 2\pi - \alpha)$$

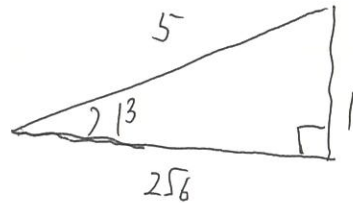
$$\theta - \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \alpha + \frac{\pi}{2} \text{ のとき } |\vec{PP}'| = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ (最大値)}$$

※ $\theta - \alpha = \frac{3}{2}\pi$ でもよい。

このとき、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \left(\tan \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \\ \cos \theta &= \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5} \quad \left(\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \\ \sin \theta &= \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad \left(\sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{15}}{5} \right) \\ \overrightarrow{OP'} &= \pm \frac{\sqrt{30}}{30} (1, -2, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{問4 } |\overrightarrow{OP'}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \\ &= \frac{2}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \sin 2\theta + \frac{1}{12} \cos 2\theta + \frac{7}{12} \\ &= \frac{1}{12} (2\sqrt{6} \sin 2\theta + \cos 2\theta) + \frac{7}{12} \\ &= \frac{5}{12} \sin (2\theta + \beta) + \frac{7}{12} \\ &\quad (\beta \leq 2\theta < 2\pi + \beta)\end{aligned}$$



$$2\theta + \beta = \frac{3\pi}{2} \text{ のとき, } |\overrightarrow{OP'}|^2 = \frac{1}{6} \text{ (最小値)}$$

$$\text{したがって, } |\overrightarrow{OP'}| = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ (最小値)}$$

4	年齢	8	9	10	11	12	計
	人数	6	9	2	1	2	20

無作為に 3 人選ぶ

$$N(\text{全}) = {}_{20}C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

問 1 $N(\text{少なくとも 1 人は 10 歳})$

$$= N(\text{全}) - N(\text{3 人とも 10 歳でない})$$

$$= {}_{20}C_3 - {}_{18}C_3$$

$$= 1140 - 816 = 324$$

$$({}_{18}C_3 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 816)$$

$$P(\text{少なくとも 1 人は 10 歳}) = \frac{324}{1140} = \frac{27}{95}$$

問 2 $N(\text{少なくとも 1 人は 10 歳かつ同じ年齢の人が 2 人以上いる})$

$$= N(\text{少なくとも 1 人は 10 歳}) - N(\text{少なくとも 1 人は 10 歳かつ全員が 10 歳})$$

年齢の組合わせ

$$\left. \begin{array}{l} (8, 9, 10) \rightarrow 6 \times 9 \times 2 = 108 \text{ 通り} \\ (8, 10, 11) \rightarrow 6 \times 2 \times 1 = 12 \text{ 通り} \\ (8, 10, 12) \rightarrow 6 \times 2 \times 2 = 24 \text{ 通り} \\ (9, 10, 11) \rightarrow 9 \times 2 \times 1 = 18 \text{ 通り} \\ (9, 10, 12) \rightarrow 9 \times 2 \times 2 = 36 \text{ 通り} \\ (10, 11, 12) \rightarrow 2 \times 1 \times 2 = 4 \text{ 通り} \end{array} \right\} 202 \text{ 通り}$$

$$= 324 - 202 = 122$$

$P(\text{少なくとも 1 人は 10 歳かつ同じ年齢の人が 2 人以上いる})$

$$= \frac{122}{1140} = \frac{61}{570}$$