

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

昭和大学 (医) II 期 数学

試験日 3月1日 (土)



- ① (1) a, b が実数だから $\bar{\alpha} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ も解である。残り 1 解を t とすると 3 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} + t = -\frac{a}{4} & \dots (1) \\ \alpha \bar{\alpha} + \alpha t + \bar{\alpha} t = \frac{5}{4} & \dots (2) \\ \alpha \bar{\alpha} t = -\frac{b}{4} & \dots (3) \end{cases}$$

$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{1}{2}$, $\alpha \bar{\alpha} = \frac{1}{4}$ より (2) から $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t = \frac{5}{4} \therefore t = 2$

(1) より $\frac{1}{2} + 2 = -\frac{a}{4} \therefore a = -10 \dots (\text{答})$

(3) より $\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{b}{4} \therefore b = -2 \dots (\text{答})$

(1-2) $\beta\gamma = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$

$(\beta\gamma)^6 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$ と用いる

$(\beta\gamma)^{2025} = (\beta\gamma)^{6 \cdot 337 + 3} = \{(\beta\gamma)^6\}^{337} \cdot (\beta\gamma)^3$
 $= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 \dots (\text{答})$

- (2) (2-1), (2-2) $f''(x) = 6x + 2a$ で $f(x)$ は $x=1$ で変曲点をとるから

$f''(1) = 6 + 2a = 0 \therefore a = -3$

$f(x) = 0$ の 3 解と係数の関係を用いる

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 & \dots (4) \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b & \dots (5) \\ \alpha\beta\gamma = -3 & \dots (6) \end{cases}$ (4) と $\alpha + \beta = 0$ より $\gamma = 3$

(5) より $\alpha\beta = b$

(6) より $3\alpha\beta = -3 \therefore \alpha\beta = -1 \therefore b = -1$

$\alpha + \beta = 0$, $\alpha\beta = -1$ より α, β は 2 解と 1 解の 2 次方程式 $t^2 - 1 = 0 \therefore t = \pm 1$

$\alpha < \beta < \gamma$ より $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 3 \dots (\text{答})$

よって $a = -3, b = -1 \dots (\text{答})$

- (2-3) $\alpha = \beta = 1$ より $\alpha = \beta$ で変曲点をとる, 3 次関数の対称性より

$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 (t - f(x)) dx$

$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \therefore \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = 0 \dots (\text{答})$



[2] (1) 加法定理より $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$
 $\tan(\alpha + \beta + \theta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \theta}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \theta} = \frac{-1 + 4}{1 - (-1) \cdot 4} = \frac{3}{5} \dots (\times)$

(2) 与式より

$$\sin A \cos B (\sin B - \sin C) = \sin B \sin C - (1 - \cos^2 C)$$

$$\sin A \cos B (\sin B - \sin C) = \sin B \sin C - \sin^2 C$$

$$\sin A \cos B (\sin B - \sin C) = \sin C (\sin B - \sin C)$$

$$(\sin A \cos B - \sin C) (\sin B - \sin C) = 0$$

よって $\sin A \cos B - \sin C = 0$ あるいは $\sin B = \sin C \dots (2)$
 $\dots (1)$

$BC = a, CA = b, AB = c, \triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

①より $\frac{a}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - \frac{c}{2R} = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$

②より $\frac{b}{2R} = \frac{c}{2R} \quad \therefore b = c$

以上より「三角形 ABC は、 $\angle A$ が直角の直角三角形、または、
 2辺 CA と AB の長さが等しい二等辺三角形である」(78字) $\dots (\times)$

(3) (与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)(2 \sin x)(\cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)(2 \sin^2 x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x (1 - \cos 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos 3x - \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) \right\} dx$
 $= \left[\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{2} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} (-1) - \frac{1}{10} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{14}{15} \dots (\times)$

(4) (4-1) $f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ より $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$

よって $0 \leq \{f(x)\}^2 \leq 2 \dots (\times)$

(4-2) $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと $2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$ となる

与方程式は $1 + (t^2 - 1) - \sqrt{2} a t - b a = 0 \quad \therefore t^2 - \sqrt{2} a t - b a = 0 \dots (3)$

求める条件は③が $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ とみれば解と少なくとも1つもつことである。

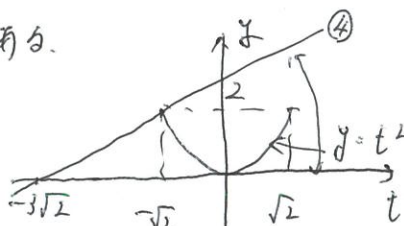
$t^2 = \sqrt{2} a (t + 3\sqrt{2})$ とみれば2つのグラフ $y = t^2$ と $y = \sqrt{2} a (t + 3\sqrt{2})$ が

$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ で交点を少なくとも1つもつことである。

右のグラフで④のとき $2 = \sqrt{2} a (-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

だから a の範囲は

$0 \leq a \leq \frac{1}{2} \dots (\times)$



[3] (1) $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ より $f'(x) = e^{\sqrt{ax}}(\sqrt{ax})' = \sqrt{a}e^{\sqrt{ax}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = e, \quad f'\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{a}e \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{ae}{2}$$

したがって l の方程式は

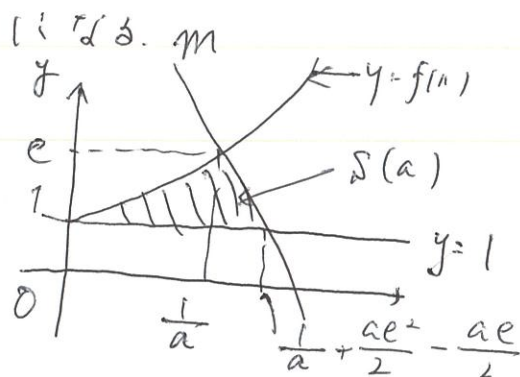
$$y = \frac{ae}{2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + e \quad \therefore y = \frac{ae}{2}x + \frac{e}{2} \quad \dots (\text{答})$$

m の傾きは $-\frac{1}{f'\left(\frac{1}{a}\right)}$ したがって $-\frac{2}{ae}$

m の方程式は

$$y = -\frac{2}{ae}\left(x - \frac{1}{a}\right) + e \quad \therefore y = -\frac{2}{ae}x + \frac{2}{a^2e} + e \quad \dots (\text{答})$$

(2) $x > 0$ で $f'(x) > 0$ であり、 $f(0) = 1$ したがって既知は下のよう



$x = \frac{1}{a}$ において

$$S(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} f(x) dx - \frac{1}{a} \cdot 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ae^2}{2} - \frac{ae}{2} \right) \cdot (e-1)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} e^{\sqrt{ax}} dx - \frac{1}{a} + \frac{ae}{4} (e-1)^2$$

$\sqrt{ax} = t$ とおくと $x = \frac{t^2}{a}$ より $dx = \frac{2t}{a} dt$ $\frac{x}{t} \Big|_{0 \rightarrow \frac{1}{a}} = \frac{1}{t} \Big|_{0 \rightarrow 1}$ より

$$S(a) = \int_0^1 e^t \cdot \frac{2t}{a} dt - \frac{1}{a} + \frac{ae}{4} (e-1)^2 = \left[\frac{2}{a} (tet - et^2) \right]_0^1 - \frac{1}{a} + \frac{ae}{4} (e-1)^2$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{ae}{4} (e-1)^2 \quad \dots (\text{答})$$

$a > 0$ より相加・相乗平均の不等式を用いて

$$S(a) \geq 2 \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{ae}{4} (e-1)^2} = \sqrt{e} (e-1)$$

等号は $\frac{1}{a} = \frac{ae}{4} (e-1)^2$ となる $a = \frac{2}{\sqrt{e}(e-1)}$ のとき成立する。

以上より $S(a)$ の最小値は $\sqrt{e} (e-1) \left(a \cdot \frac{2}{\sqrt{e}(e-1)} \right) \quad \dots (\text{答})$

4 (1) $p(n)$ について 全体の数字の数は $52C_n$,

2枚だけが同じ数字で残りのすべて異なる数字となるのは

2枚の同じ数字の決め方は $13C_1$ 通り

その残りの決め方は $4C_2$ 通り

残りの $(n-2)$ 枚の数字の決め方は $12C_{n-2}$ 通り

その残りの決め方は 4^{n-2} 通り になる

$$p(n) = \frac{13C_1 \cdot 4C_2 \cdot 12C_{n-2} \cdot 4^{n-2}}{52C_n}$$

よって

$$p(3) = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{17 \cdot 25} = \frac{72}{425} \dots (\text{答})$$

$$(2) \frac{p(n)}{p(n+1)} = \frac{13 \cdot 6 \cdot \frac{12!}{(n-2)!(14-n)!} \cdot 4^{n-2}}{\frac{52!}{n!(52-n)!}} \cdot \frac{\frac{52!}{(n+1)!(51-n)!}}{13 \cdot 6 \cdot \frac{12!}{(n-1)!(13-n)!} \cdot 4^{n-1}}$$

$$\left(p(n+1) = \frac{13C_1 \cdot 4C_2 \cdot 12C_{n-1} \cdot 4^{n-1}}{52C_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{n! \cdot (52-n)! \cdot 4^{n-2}}{(n-2)!(14-n)!} \cdot \frac{(n-1)!(13-n)!}{(n+1)!(51-n)! \cdot 4^{n-1}} = \frac{(52-n)(n-1)}{4(14-n)(n+1)} \dots (\text{答})$$

(3) (2) で $n=3$ とし

$$\frac{p(3)}{p(4)} = \frac{49 \cdot 2}{4 \cdot 11 \cdot 4} = \frac{49}{88} < 1 \text{ より } p(3) < p(4) \dots (\text{答})$$

(4) (2) で $n=13$ とし

$$\frac{p(13)}{p(14)} = \frac{39 \cdot 12}{4 \cdot 1 \cdot 14} = \frac{39 \cdot 3}{14} = \frac{117}{14} > 1 \text{ より } p(13) > p(14) \dots (\text{答})$$

$$(5) \frac{p(n)}{p(n+1)} < 1 \text{ とすると } 3 \leq n \leq 13 \text{ かつ } (52-n)(n-1) < 4(14-n)(n+1)$$

$$3n^2 + n < 108$$

$\{3n^2 + n\}$ は n の連続する整数列であり、

$n=5$ のとき $3n^2 + n = 80$, $n=6$ のとき $3n^2 + n = 114$ になる

$n=3, 4, 5$ のとき $\frac{p(n)}{p(n+1)} < 1$, $6 \leq n \leq 13$ のとき $\frac{p(n)}{p(n+1)} > 1$

よって $p(3) < p(4) < p(5) < p(6) > p(7) > p(8) > \dots > p(14)$

よって $p(n)$ が最大となる n は $n=6 \dots (\text{答})$

<講評>

① (1) 3 次方程式、ド・モアブルの定理 (易)

(2) 3 次関数の性質、定積分 (標準)

(1) 解と係数の関係が利用できる。

(2) 3 次関数は変曲点に関して対称であることと利用すれば、積分計算と省略できる

② (1) $\tan$ の加法定理 (標準)

(2) 三角形の性質 (標準)

(3) 三角関数の定積分 (やや難)

(4) 文字定数を含む三角関数の方程式 (標準)

(1) 加法定理と 2 回使う。(2) 定数 1 となくせば因数分解が見えてくる。

(3) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ と置いて考える。

(4) 2 次方程式の解の配置、放物線と直線の位置関係でめると楽。

③ 指数関数の増減、面積 (標準)

文字定数 a がいろいろと出てくるので計算と慎重にする必要がある。

考え方は普通。

④ トランプを引く確率、確率の最大値 (標準)

考え方はよくあるものだが、 n が多々出てくるので、計算に注意とする。

② に考えにくいものが入っているが、方針でつまることは

はほとんどなく、計算の複雑さに注意して 70% が目標

となりそうである。