

医学部専門予備校 クエスト 解答速報

聖マリアンナ医科大学 (医) 後期 数学 試験日 3月6日 (木)



① (1) つねに借り入れ残高が変わらないことから,  $a_1 = 3600$  と

考えてよく, 第2式より  $3600 = 1.01875 \times 3600 - x$

より  $x = 0.01875 \times 3600 = \underline{67.5} \dots (\text{答})$

(2)  $1.01875 = r$  とおくと  $a_{k+1} = ra_k - x$

これを变形すると  $a_{k+1} - \frac{x}{r-1} = r \left( a_k - \frac{x}{r-1} \right)$

より  $a_k = \frac{x}{r-1} + \left( a_1 - \frac{x}{r-1} \right) r^{k-1}$

$k = 20$  より,  $a_1 = 3600r - x$  より

$$a_{20} = \frac{x}{r-1} + \left( 3600r - x - \frac{x}{r-1} \right) r^{19}$$

$$= \frac{x}{r-1} + \left( 3600r - \frac{x}{r-1} r \right) r^{19}$$

$$= \frac{x}{r-1} + 3600r^{20} - \frac{x}{r-1} r^{20}$$

$a_{20} = 0$  より  $\frac{x}{r-1} (r^{20} - 1) = 3600r^{20}$

$$x = \frac{3600r^{20}(r-1)}{r^{20}-1} = \frac{3600 \cdot 1.45 \times 0.01875}{0.45} = \underline{217.5} \dots (\text{答})$$

② (1)  $\frac{dx}{d\theta} = 4\sqrt{3} \cos \theta (1 - \cos \theta) + 4\sqrt{3} \sin^2 \theta$

$$= 4\sqrt{3} (\cos \theta - \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta) = 4\sqrt{3} (1 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta)$$

$$= 4\sqrt{3} (1 - \cos \theta) (1 + 2\cos \theta)$$

$\frac{dx}{d\theta} = 0$  とすると,  $0 < \theta < 2\pi$  で  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

増減は次のようになる。

|                      |   |     |                  |     |                  |     |        |
|----------------------|---|-----|------------------|-----|------------------|-----|--------|
| $\theta$             | 0 | ... | $\frac{2}{3}\pi$ | ... | $\frac{4}{3}\pi$ | ... | $2\pi$ |
| $\frac{dx}{d\theta}$ |   | +   | 0                | -   | 0                | +   |        |
| $x$                  | 0 | ↑   | 9                | ↓   | -9               | ↑   | 0      |

$$\therefore -9 \leq x \leq 9 \quad \dots (\frac{1}{3})$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = 4\sqrt{3} \left( 1 + \cos\theta - 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) = -4\sqrt{3} \cos 2\theta + 4\sqrt{3} \cos\theta \dots (\frac{2}{3})$$

$$(2) y = 4\sqrt{3} \left\{ -\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right\}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ より } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ の最大値は } 4\sqrt{3} \cdot \frac{9}{4} = 9\sqrt{3}, \cos\theta = -1 \text{ の最小値は } 0 \text{ となるから, } 0 \leq y \leq 9\sqrt{3} \quad \dots (\frac{3}{3})$$

$$\therefore y = 4\sqrt{3} \left( 2 + \cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cos\theta - 2\sqrt{3} \cos 2\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = 4\sqrt{3} \sin 2\theta - 4\sqrt{3} \sin\theta \quad \dots (\frac{4}{3})$$

$$(3) \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (4\sqrt{3})^2 (\cos 2\theta - \cos\theta)^2 + (4\sqrt{3})^2 (\sin 2\theta - \sin\theta)^2$$

$$= 48 (2 - 2(\cos 2\theta \cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta)) = 48 (2 - 2\cos\theta)$$

$$= 48 \left\{ 2 - 2 \left( 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = 48 \cdot 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ より } \sin \frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ となるから, 面積 } C \text{ の } \frac{1}{2} \text{ は}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 8\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \left[ -16\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 32\sqrt{3} \quad \dots (\frac{5}{3})$$

$$\boxed{3} (1) \text{ 題意より } \frac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}} = \sqrt{s^2+t^2}$$

$$(2as+3bt-1)^2 = (s^2+t^2)(4a^2+9b^2)$$

$$9b^2t^2 - 12abst + 4a^2t^2 + 4as + 6bt - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots (\frac{2}{3})$$

$$(2) (i) b=0 \text{ より } \textcircled{1} \text{ より } 4a^2t^2 + 4as - 1 = 0$$

$$a > 0 \text{ より } s = -at^2 + \frac{1}{4a}$$

$$\therefore t=0 \text{ のとき } s \text{ は最大となり, 最大値は } \frac{1}{4a} \quad \therefore Q \left( \frac{1}{4a}, 0 \right) \quad \dots (\frac{3}{3})$$

(ii) ①  $t$  について整理して

$$4a^2t^2 + (6b - 12abs)t + 9b^2t^2 + 4as - 1 = 0$$

$t$  は実数だから判別式  $\geq 0$  と  $D \geq 0$ .

$$D/4 = (3b - 6abs)^2 - 4a^2(9b^2t^2 + 4as - 1)$$

$$= (4a^2 + 9b^2)(1 - 4as) \geq 0$$

$$4a^2 + 9b^2 > 0 \text{ より } 1 - 4as \geq 0$$

$$a > 0 \text{ より } S \leq \frac{1}{4a}$$

∴  $S = \frac{1}{4a}$  ① に代入して

$$9b^2 \cdot \frac{1}{16a^2} + (4a - 12abt) \cdot \frac{1}{4a} + 4a^2t^2 + 6bt - 1 = 0$$

$$4a^2t^2 + 3bt + \frac{9b^2}{16a^2} = 0$$

$$\left(2at + \frac{3b}{4a}\right)^2 = 0$$

∴  $t = -\frac{3b}{8a^2}$  である。

$$\text{よって } Q\left(\frac{1}{4a}, -\frac{3b}{8a^2}\right) \dots (\text{答})$$

(3)  $Q(x, y)$  とおくと (2)(ii) より  $x = \frac{1}{4a}$ ,  $y = -\frac{3b}{8a^2}$   $b \neq 0$  のとき  
 成立する。  $a > 0$  より  $a = \frac{1}{4x}$  だから

$$b = -\frac{8y}{3} \cdot a^2 = -\frac{8y}{3} \left(\frac{1}{4x}\right)^2 = -\frac{y}{6x^2}$$

$$4a^2 + 9b^2 = 1 \text{ だから } 4\left(\frac{1}{4x}\right)^2 + 9\left(-\frac{y}{6x^2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4x^2} + \frac{y^2}{4x^4} = 1 \quad \therefore y^2 = 4x^4 - x^2$$

$$\text{よって } f(x) = \underline{4x^4 - x^2} \dots (\text{答})$$

さらに  $4a^2 + 9b^2 = 1$  より  $4a^2 \leq 1$  であり、 $a > 0$  とおくと

$$0 < a \leq \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{4x} \text{ であるから } 0 < \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{2}$$

$$x > 0 \text{ より } x \geq \underline{\frac{1}{2}} \dots (\text{答})$$

4 (1)  $f(x) = x^n$  のとき

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k x^{n-k} h^k - x^n$$

$$= \sum_{k=1}^n {}^nC_k x^{n-k} h^k = n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^n {}^nC_k x^{n-k} h^k$$

これから  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1} + \sum_{k=2}^n {}^nC_k x^{n-k} h^{k-1}$

$k \geq 2$  より  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n {}^nC_k x^{n-k} h^{k-1} = 0$  になる。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underline{n x^{n-1}} \quad \dots \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

(2)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  のとき

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\sin(x+h)}{x+h} - \frac{\sin x}{x} = \frac{x \sin(x+h) - (x+h) \sin x}{x(x+h)}$$

$$= \frac{x \{ \sin(x+h) - \sin x \} - h \sin x}{x(x+h)} = \frac{x \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} - h \sin x}{x(x+h)}$$

$$= \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{x+h} - \frac{h \sin x}{x(x+h)}$$

これから  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{x+h} \cdot \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} - \frac{\sin x}{x(x+h)}$

$h \rightarrow 0$  のとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$  になる。

$$f'(x) = \frac{\cos(x+0)}{x+0} \cdot 1 - \frac{\sin x}{x(x+0)} = \underline{\frac{x(\cos x - \sin x)}{x^2}} \quad \dots \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$



## <講評>

### [1] ローンの返済に関する漸化式 (標準)

- (1)  $x$  万円を返しても残高が減らないと仮定から  $a_1 = 3600$  とすればよい。
- (2) 一般項を求めて計算  
数値計算が大変

### [2] 媒介変数で表された曲線の長さ (標準)

定型問題で落とせない。

### [3] 斜めの放物線に関する軌跡 (標準 ~ やや難)

- (1) 放物線の定義が与えられているから、これを用いる。
- (2) (i)  $\theta = 0$  と代入して  $s$  と  $t$  の関数にして考える。  
(ii) (1) の結果を  $t$  の式とみて、 $t$  は実数だから、判別式を用いて、 $s$  の範囲を求める。
- (3) (2) から  $Q(x, y)$  が  $a, b$  の式で表されるから  $a, b$  を消去する。

文字計算が大変

### [4] 導関数の定義 (標準)

- (1) 二項定理を使う。
- (2) 和積か加法定理を使う。

[2] が一番楽で、次に [4] が得点しやすい。[1], [3] は計算が多く、ミスしやすいので正確にできることができればよい。試験時間 90 分でもすべて解ききるのは大変で、60% とればよいと思われる。